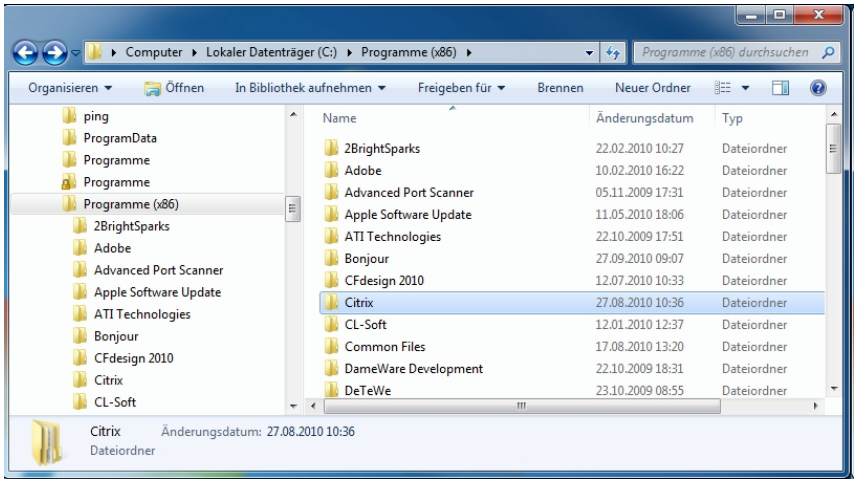
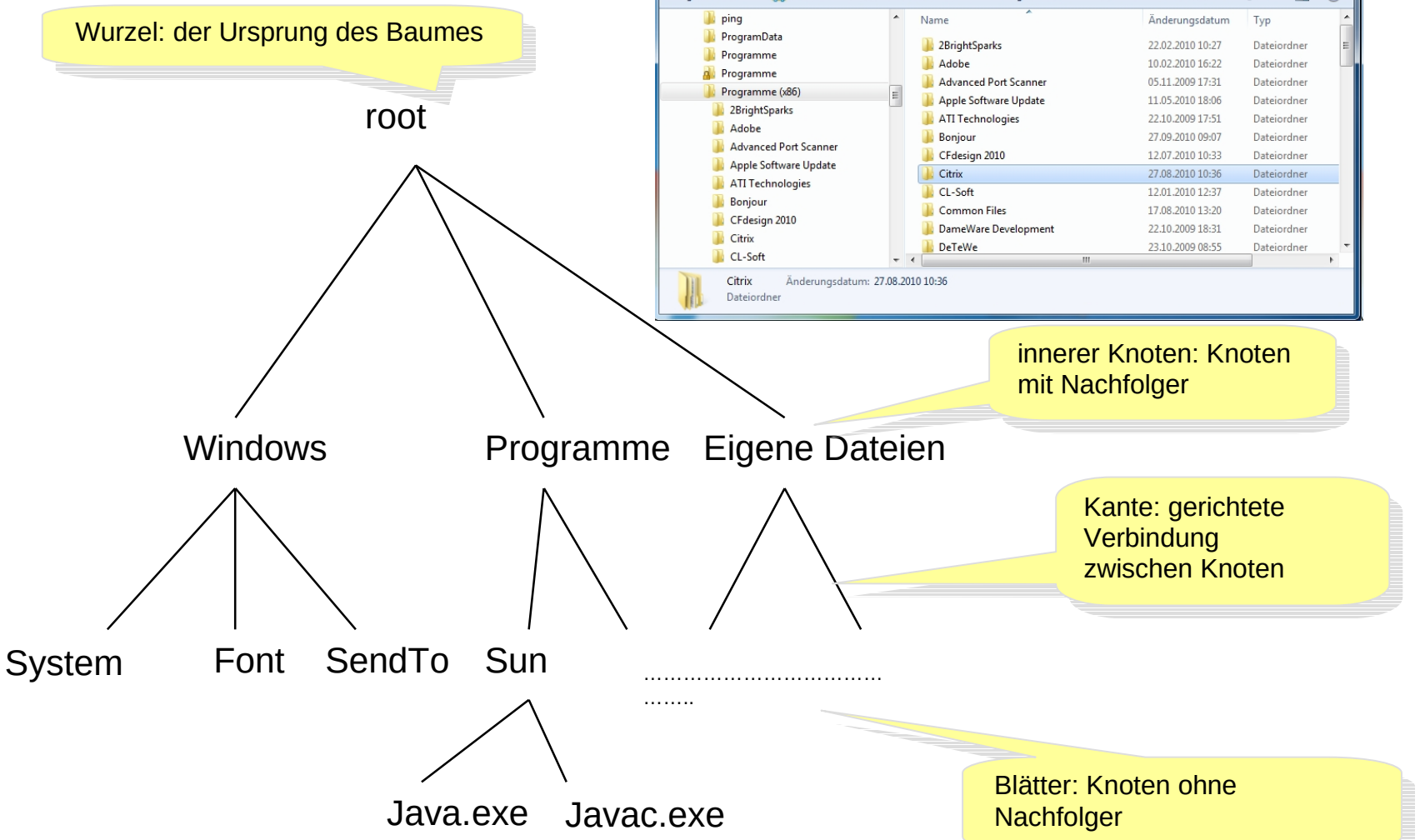
Bäume

- Sie wissen, was Bäume in der Informatik sind
- Sie kennen das Besucher-Entwurfsmuster
- Sie kennen Binärbäume
- Sie können die Bäume auf unterschiedliche Arten traversieren
- Sie wissen, wie man in Binärbäumen Elemente löscht

Bäume, Anwendung und Begriffe

Beispiel 1: Dateisystem

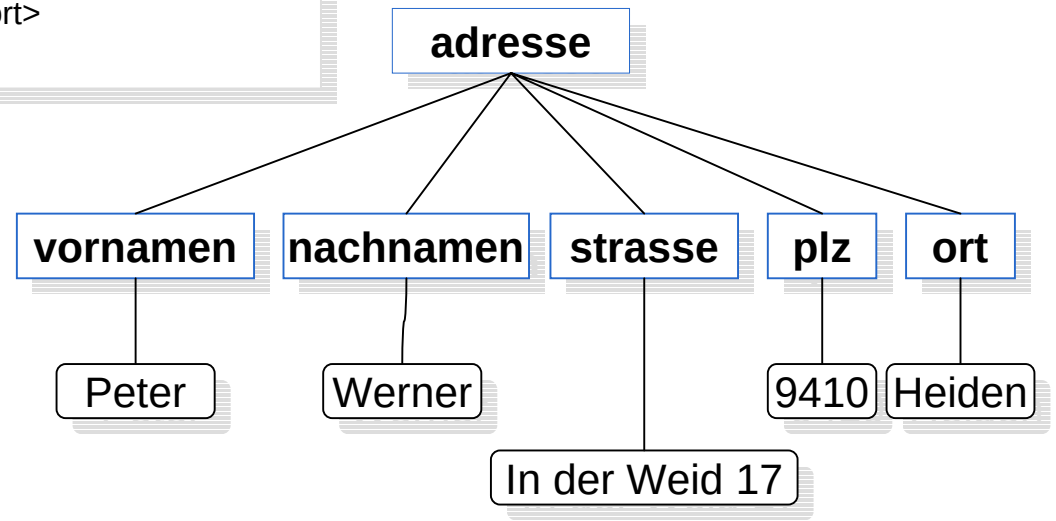




Beispiel 2: XML- Dokument

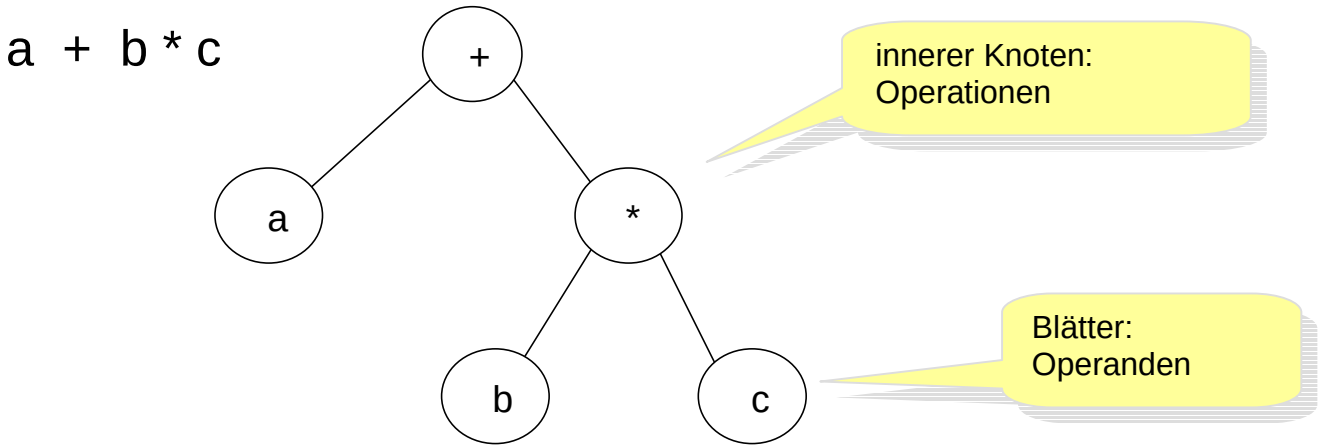
- Ein XML Dokument besteht aus einem Wurzelelement an dem beliebig viele Nachfolgeelemente angehängt sind, an denen wiederum Nachfolgeelemente hängen können.

```
<adresse>
  <anrede>Herr</anrede>
  <vorname>Peter<vorname>
  <nachname>Werner</nachname>
  <strasse>In der Weid 17</strasse>
  <plz>9410</plz>
  <ort>Heiden</ort>
</adresse >
```



Beispiel 3: Ausdruck-Baum

- Der Ausdruck-Baum (expression tree) wird eingesetzt um arithmetische Ausdrücke auszuwerten: der Ausdruck wird zuerst in einen Baum umgeformt und dann ausgewertet.



Definition Baum (rekursiv)

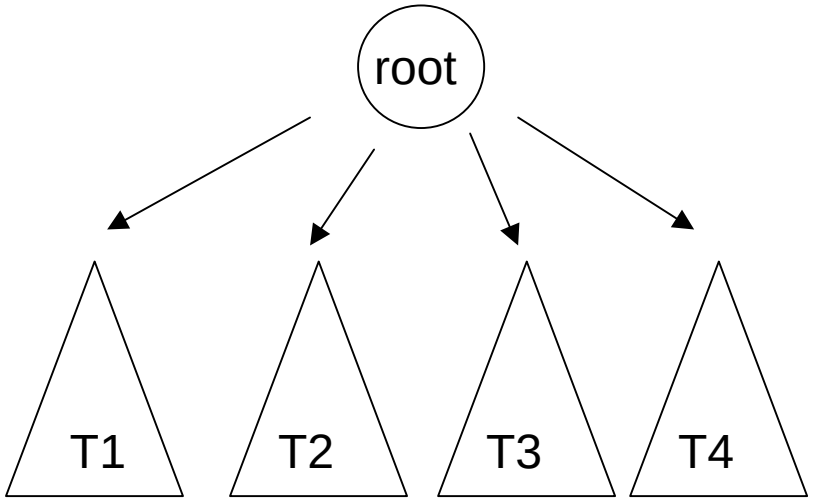
Der Baum ist eine **fundamentale Datenstruktur in der Informatik**

ein Baum ist **leer**

oder

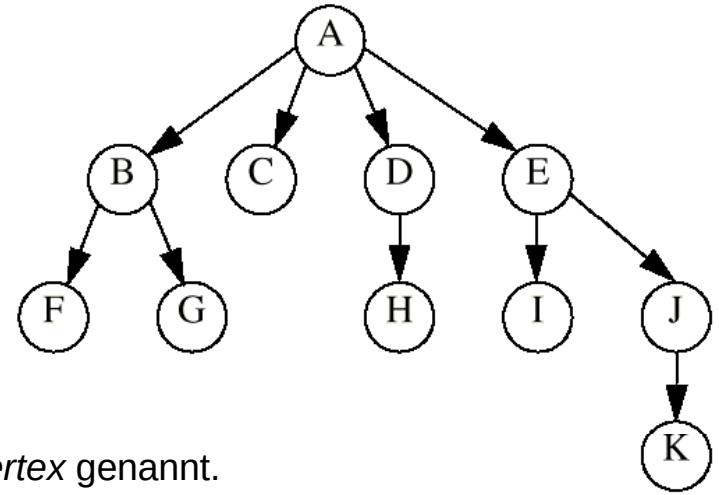
er besteht aus einem Knoten mit keinem, einem oder mehreren disjunkten Teilbäumen T1 , T2 , ... Tk .

Baum = leer
Baum = Knoten (Baum)*



Definition Baum (nicht rekursiv)

Ein Baum *T=(V,E)* besteht aus eine Menge von ***Knoten V*** und einer Menge von ***gerichteten Kanten E***. Der *root*-Knoten $r \in V$ hat nur Ausgangskanten. Alle anderen Knoten $n \in V \backslash r$ haben genau eine Eingangskante, wobei für alle Kanten gilt: e= (v1 ,v2) und v1 != v2 .



- Hinweis:
  - Knoten werden auch *vertices* bzw. *vertex* genannt.
  - Kanten heissen auch *edges* bzw. *edge*.

Eigenschaften und Begriffe

- Alle Knoten ausser Wurzel (*root*) sind **Nachfolger** (*descendant, child*) genau eines **Vorgänger-Knoten**s (*ancestor, parent*).
- Knoten mit Nachfolger werden **innerer Knoten** bezeichnet
- Knoten ohne Nachfolger sind **Blattknoten**.
- Knoten mit dem gleichen Vorgänger-Knoten sind **Geschwisterknoten** (*sibling*).
- Es gibt **genau einen Pfad** vom *Wurzel*-Knoten zu jedem anderen Knoten.
- Die Anzahl der Kanten, denen wir folgen müssen, ist die **Weglänge** (*path length*).
- Die **Tiefe (oder Höhe)** eines Baumes gibt an, wie weit die "tiefsten" Blätter von der Wurzel entfernt sind: Anzahl Kanten + 1.
- Die **Gewicht** ist die Anzahl der Knoten des (Teil-)Baumes

Übung

root-Node = ...

Tiefe = ….

Gewicht = ….

Nachfolger von B = ...

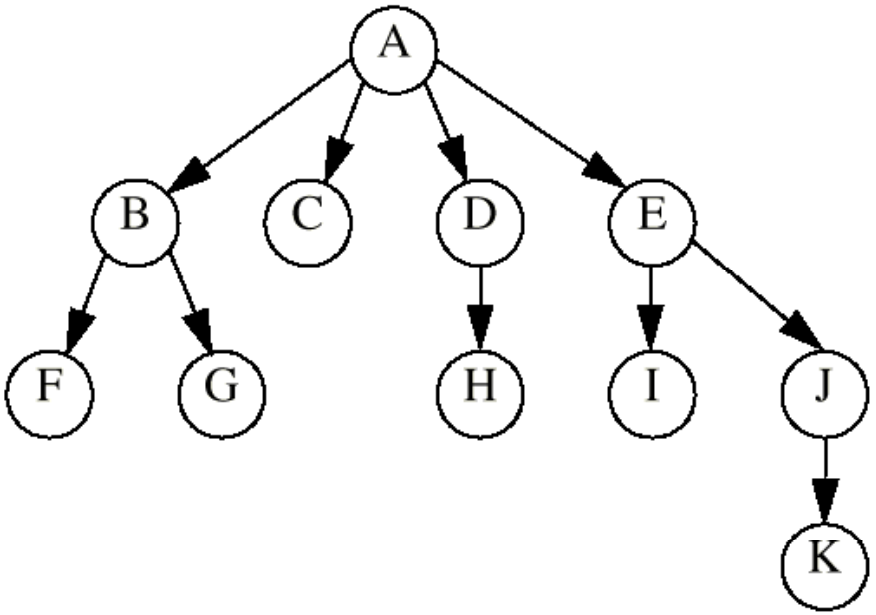
Nachfolger von A = ...

Vorgänger von K = ...

Blattknoten = ...

Geschwister von C = ...

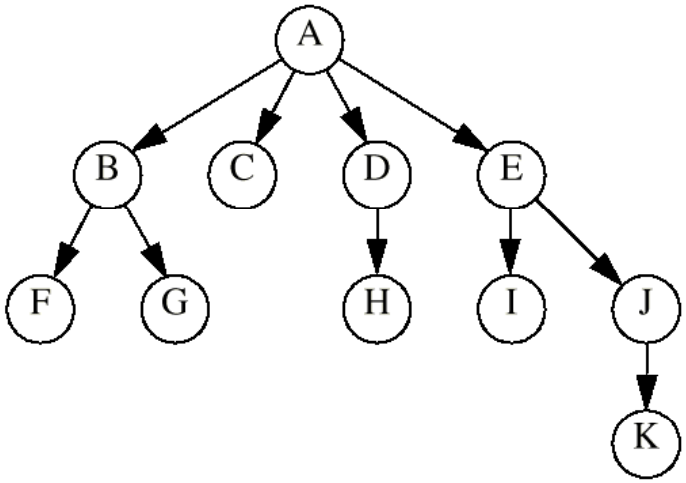
Geschwister von H = ...



Ein Knoten hat ..... direkte Vorgänger-Knoten.

Ein Knoten kann ..... direkte Nachfolger haben.

Knoten Implementation




```
class TreeNode<T> {
     T element;
     List<TreeNode<T>> edges;

   TreeNode(T theElement) {
     element = theElement;
   }
}
```

- Jeder Knoten hat Zeiger auf jeden Nachfolger in Array gespeichert
- Die Zahl der Nachfolger pro Knoten kann *stark variieren* und ist meist *nicht zum voraus bekannt* -> nicht effizient.
- mögliche bessere Lösung: Zeiger in *Liste* verwalten.

Binärbaum

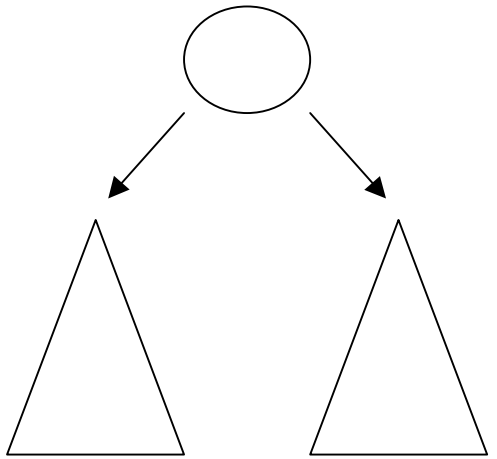
Der Binärbaum

- Die am häufigsten verwendete Art von Bäumen: beim Binärbaum hat ein Knoten maximal **2 Nachfolger.**

- Definition (rekursiv):

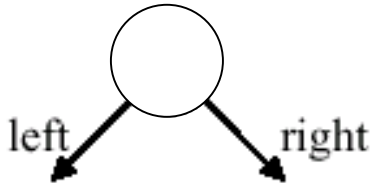
Ein Binärbaum ist entweder leer, oder besteht aus einem Wurzel-Knoten und aus einem linken und einem rechten disjunkten Teilbaum.

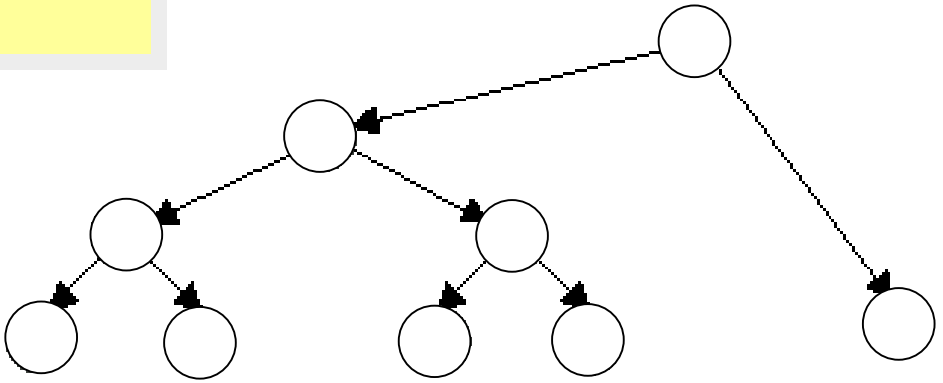
Baum = leer
Baum = Knoten (Baum Baum)



Die Datenstruktur des Binärbaums

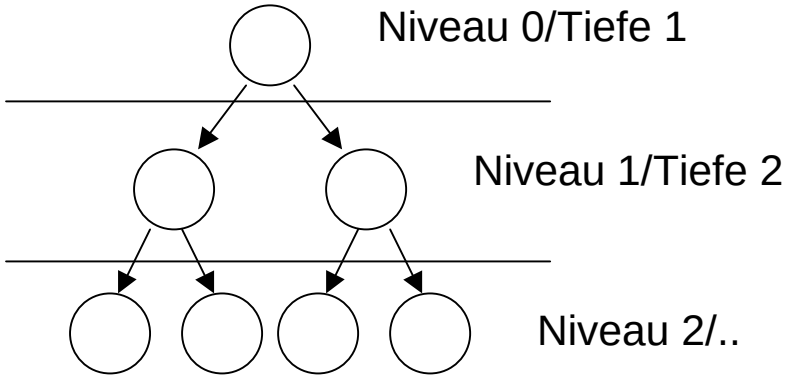
```
class TreeNode<T> {
   T element;
   TreeNode<T> left;
   TreeNode<T> right;

  TreeNode(T theElement) {
   element = theElement;
  }
}
```





Eigenschaften

- Tiefe/Höhe: k
- auf jedem Niveau 2^n Knoten oder $2^{(k-1)}$
- Maximal Anzahl $2^k - 1$ Knoten



- Ein Binärbaum heisst **voll (oder vollständig)**, wenn ausser der letzten alle seinen Ebenen vollständig besetzt sind.
- Aufgabe: Leiten Sie eine Formel für die Höhe des vollen Baumes her und bestimmen Sie die Tiefe eines vollen Binärbaums mit 37 Knoten?
- Hinweis $\log_a n = \ln n / \ln a$

Traversierungen

Ausgeben aller Elemente

Baum = leer
Baum = Element (Baum Baum)

```
public class TreeNode<T> {
   T element;
   TreeNode<T> left;
   TreeNode<T> right;
}
```

- Übung: Schreiben Sie eine rekursive Methode `printTree`, die alle Elemente eines Baumes ausgibt

Hinweis: Ausgeben einer Liste mit einer rekursiven Methode:

```
void printList(ListNode node) {
    if (node != null)
        System.out.println(node.element);
        printList(node.next)
    }
}
```

Traversieren

Das (rekursive) Besuchen aller Knoten in einem Baum wird als durchlaufen oder **traversieren** bezeichnet.

Die Art der Traversierung bestimmt die Reihenfolge, in welcher die Knoten besucht werden.

Dadurch sind die Knoten *"linear geordnet"*

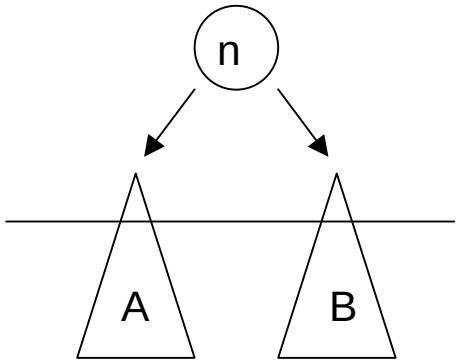
Die möglichen Arten von Traversierung (beim Binärbaum) sind:

Preorder Knoten zuerst: n, A, B

Inorder Knoten in der Mitte: A, n, B

Postorder Knoten am Schluss: A, B, n

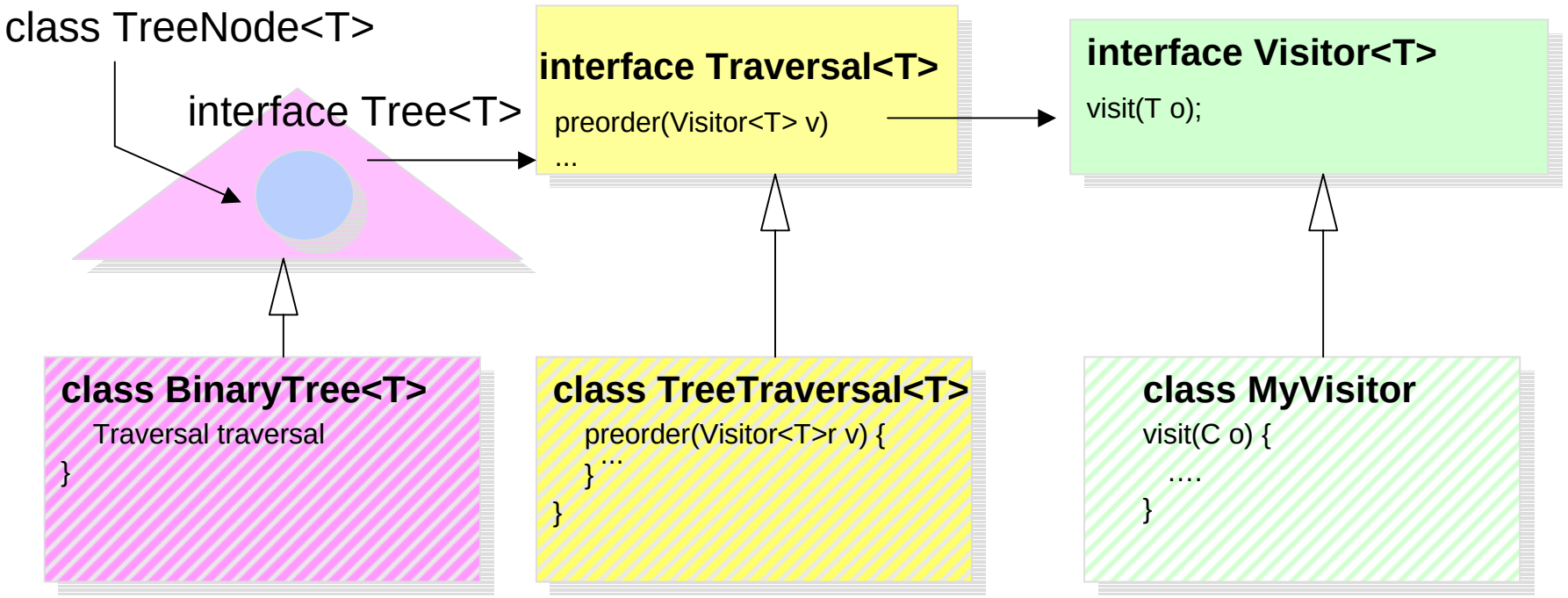
Levelorder: n, a_0, b_0, a_1, a_2, b_1, b_2, ..



Klassen zur rekursiven Traversierung

Rückruf Prinzip & Besucher Entwurfsmuster:

die visit Methode des übergebenen Visitors wird für jeden Knoten aufgerufen



Klassen zur Traversierung eines Baumes

```
interface Tree<T> {
     Traversal<T> traversal();
     void add(T o);
     void remove(T o);
}
```

Schnittstelle mit den grundlegenden Operationen

```
class TreeNode<T> {
      T element;
      TreeNode<T> left,right;
}
```

Knotenelement

```
interface Traversal<T> {
    void preorder(Visitor<T> vistor);
    void inorder(Visitor<T> visitor);
    void postorder(Visitor<T> visitor);
    void levelOrder}(Visitor<T> visitor);
}
```

Interface mit traversal Methode(n)

```
interface Visitor<T> {
   void visit(T o)
}
```

Interface des "Besuchers"

```
class MyCVisitor implements Visitor<T>{
    visit(T o) {
      System.out.println(c);
    }
}
```

Implementation des "Besuchers"

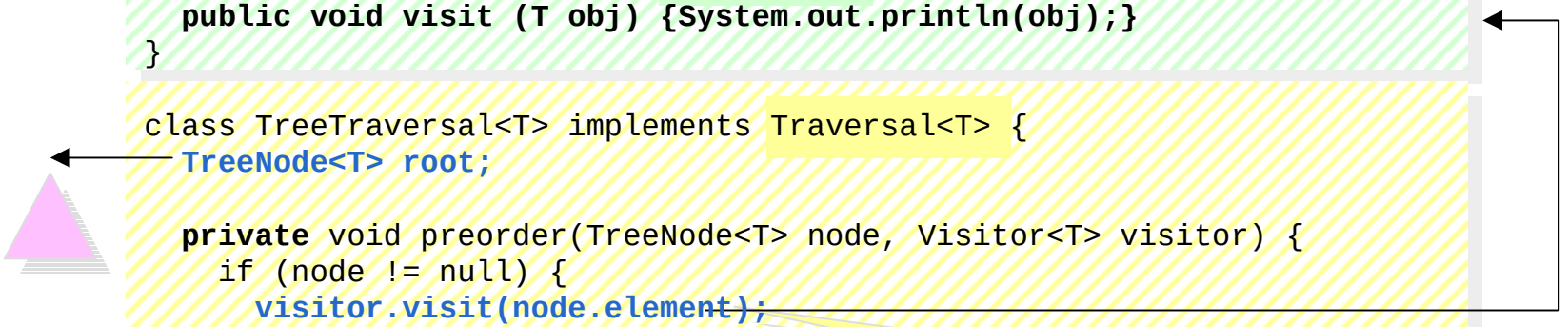
Implementation Preorder

- Verarbeitung am Anfang
  - **Besuche die Wurzel.**
  - **Traversiere den linken Teilbaum (in Preorder).**
  - **Traversiere den rechten Teilbaum (in Preorder).**

```
interface Visitor<T> {
  void visit(T obj);
}
```

```
class MyCVisitor implements Visitor<T> {
  public void visit (T obj) {System.out.println(obj);}
}
```

```
class TreeTraversal<T> implements Traversal<T> {
  TreeNode<T> root;

  private void preorder(TreeNode<T> node, Visitor<T> visitor) {
    if (node != null) {
      visitor.visit(node.element);
      preorder(node.left,visitor);
      preorder(node.right,visitor);
    }
  }
  public void preorder(Visitor<T> visitor) {
     preorder(root,visitor)
  }
}
```



Implementation Postorder

- Verarbeitung am Schluss

  - **Traversiere den linken Teilbaum (in Postorder).**
  - **Traversiere den rechten Teilbaum (in Postorder).**
  - **Besuche die Wurzel.**

```
private void postorder(TreeNode<T> node, Visitor<T> visitor) {
  if (node != null) {
    postorder(node.left,visitor);
    postorder(node.right,visitor);
    visitor.visit(node.element);
  }
}
```

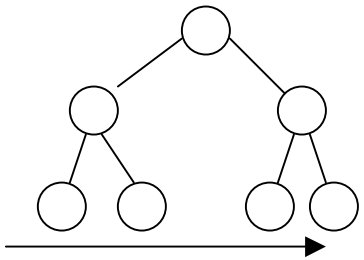
- Zuerst werden die Nachfolger abgearbeitet und dann der Knoten selber (von unten nach oben)
- somit sind left und right-Teilbaum verarbeitet und die Verweise können "verändert"bzw. anderweitig gesetzt werden.
  - kann z.B. ausgenutzt werden, wenn der Baum umgespeichert werden muss
    - *z..B bei Expression-Tree: Umwanldung von Infix -> Prefix Notation*

Implementation Inorder

- Verarbeitung in der Mitte
  - **Traversiere den linken Teilbaum (in Inorder).**
  - **Besuche die Wurzel.**
  - **Traversiere den rechten Teilbaum (in Inorder).**

```
private void inorder(TreeNode<T> node, Visitor<T> visitor) {
  if (node != null) {
    inorder(node.left,visitor);
    visitor.visit(node.element);
    inorder(node.right,visitor);
  }
}
```

- Der Baum wird quasi von links nach rechts abgearbeitet



Implementation Preorder mit explizitem Stack

School of Engineering

- Es wird nicht der Aufrufstack verwendet
- Kindelemente werden auf den Stack abgelegt und im nächsten Durchgang verarbeitet

```
void preorder(TreeNode<T> node, Visitor<T> visitor) {
    Stack s = new Stack();
    if (node != null) s.push(node);
    while (!s.isEmpty()){
       node = s.pop();
       visitor.visit(node.element);
       if (node.right != null) s.push(node.right);
       if (node.left !=null) s.push(node.left);
    }
}
```

Implementation Levelorder

School of Engineering

- Besuche die Knoten schichtenweise:
  - **zuerst die Wurzel,**
  - **dann die Wurzel des linken und rechten Teilbaumes,**
  - **dann die nächste Schicht, usw. ...**

```
void levelorder(TreeNode<T> node, Visitor<T> visitor) {
    Queue q = new Queue();
    if (node != null) q.enqueue(node);
    while (!q.isEmpty()){
       node = q.dequeue();
       visitor.visit(node.element);
       if (node.left !=null) q.enqueue(node.left);
       if (node.right != null) q.enqueue(node.right);
    }
}
```

Aufgerufene Methode (Lambda Ausdruck)

- Methode ist in einer Klasse die das Interface imlementiert

```
Traversal {
   preorder(Visitor<T> visitor);
   ...
}

class MyCVisitor implements Visitor<T> {
  public void visit (T obj) {System.out.println(obj);}
}

tree.traversal().preorder(new MyCVisitor());
```

- Kann auch als Annonyme Klasse "inline" implementiert werden

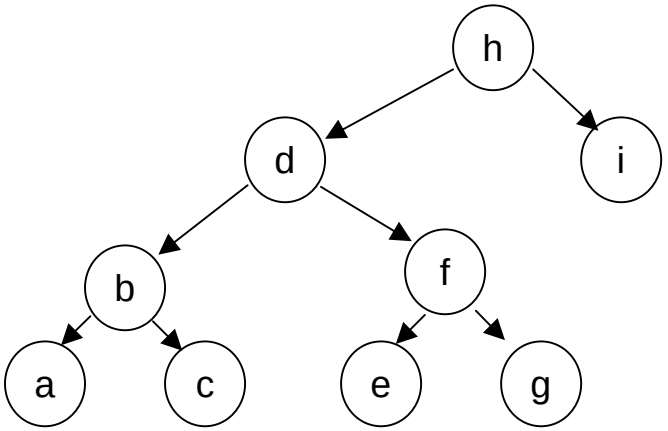
```
tree.traversal().preorder(new Visitor()
          {public void visit (T obj) {System.out.println(obj);}}
);
```

- Noch eleganter als Java 8 Lambda Ausdruck

```
tree.traversal().preorder(obj -> {System.out.println(obj);})
```

Übung

Zeigen Sie die Reihenfolge bei
den verschiedenen Traversierungsarten
auf



Preorder: (n, L, R) ……

Inorder: (L, n, R) ……..

Postorder: (L, R , n) ……..

Levelorder: ……..

Übung

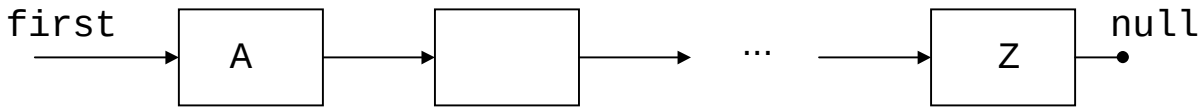
- Preorder-Traversierung: 10, 3, 1, 4, 2, 9, 7, 5, 8
- Inorder-Traversierung: 3, 4, 1, 10, 9, 7, 2, 8, 5

- Zeichnen und stellen Sie den Baum anhand dieser Informationen wieder her.

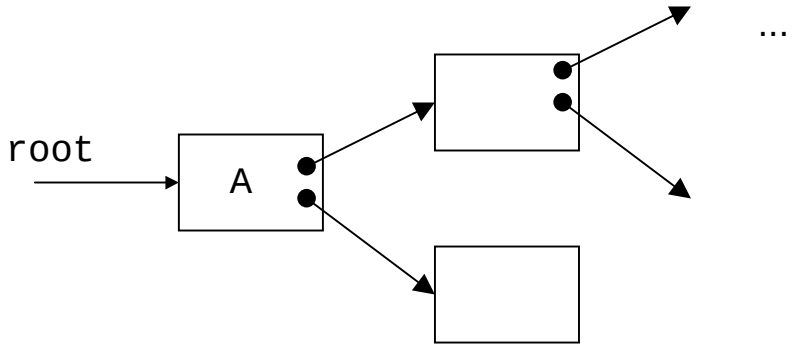
Mutationen von (sortieren) Bäumen

Übung Anfügen an Liste

- Zum Einfügen stellt man sich Bäume am einfachsten als erweiterte Listen vor



- **Übung**: Schreiben Sie eine rekursive Methode **insertAt**, die ein neues Element am Schluss einer Liste anhängt.



Einfügen unsortiert

a) freie Stelle finden

b) neuen Knoten einfügen

```
class BinaryTree<T> implements Tree<T>{
  private TreeNode<T> root;

  private TreeNode insertAt(TreeNode node, T x) {
    if (node == null) {
      return new TreeNode(x);
    }
    else {
      node.right = insertAt(node.right, x);
      // or
      // node.left = insertAt(node.left, x);
      return node;
    }
  }

  public void insert (T x) {
    root = insertAt(root, x);
  }
}
```

links oder rechts einfügen

Sortierte Binärbäume

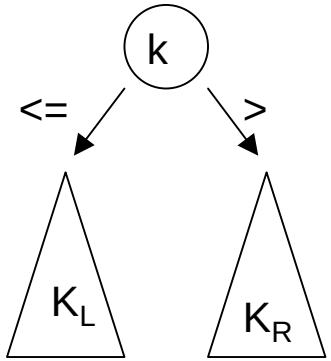
- Beim binären Suchbaum werden die Objekte anhand ihres (Schlüssel-) Werts geordnet eingefügt:
- in Java: Interface `Comparable<T>`

Definition:

Für jeden Knoten gilt

im linken Unterbaum sind alle kleineren Elemente K_L <=* k

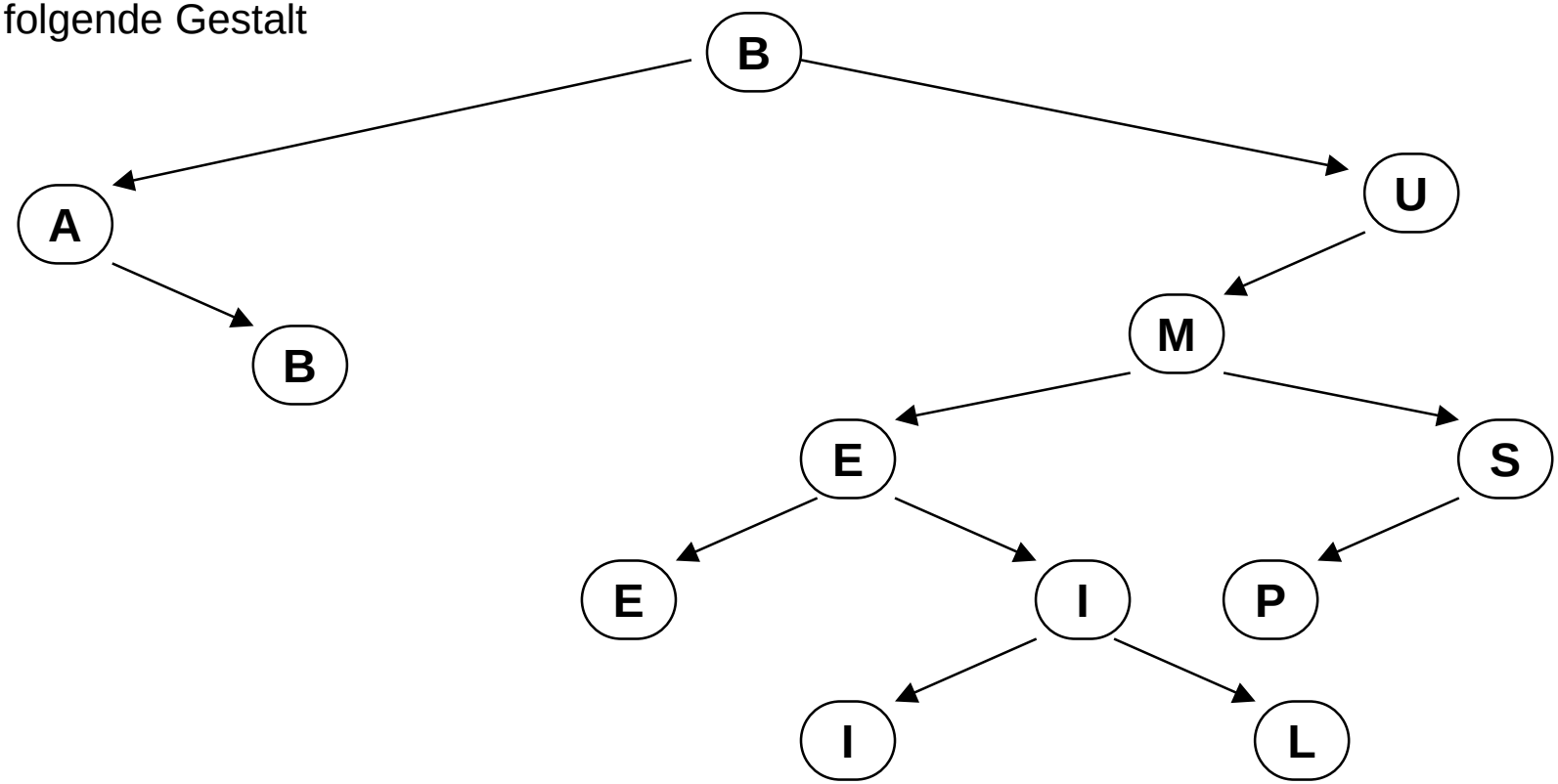
im rechten Unterbaum sind alle grösseren Elemente: K_R >* k



* manchmal auch < und >=

Beispiel eines sortierten Binärbaums

- Der sortierte Binärbaum hat nach dem Einfügen von "BAUMBEISPIEL" folgende Gestalt



Übung

- Numerieren Sie die Knoten entsprechend ihrer Reihenfolge beim Einfügen
- Geben Sie an, welche Zeichenkette bei einer Inorder Traversierung ausgegeben wird
- Welche Traversierung muss angewendet werden, damit die Knoten in alphabetischer Reihenfolge ausgegeben werden?
- Zeichnen Sie den Baum auf, bei dem man die Zeichenkette rückwärts eingefügt hat, d.h. L,E,I, …
- Zeichnen sie den Baum auf, der beim Einfügen von A,B,B,E,E,I,I,L,M,P,S,U entsteht

Einfügen sortiert

- Beim Einfügen muss links eingefügt werden, wenn das neue Element kleiner oder gleich ist, sonst rechts

```
class BinaryTree<T extends Comparable<T>> implements Tree<T>{
  private TreeNode<T> root;

  private TreeNode<T> insertAt(TreeNode<T> node, T x) {
    if (node == null) {
      return new TreeNode(x);
    }
    else {
      if (x.compareTo(element) <= 0)
         node.left = insertAt(node.left, x);
      else
         node.right = insertAt(node.right, x);
      return node;
    }
  }

  public void add (T x) {
    root = insertAt(root, x);
  }
}
```

Löschen: einfache Fälle

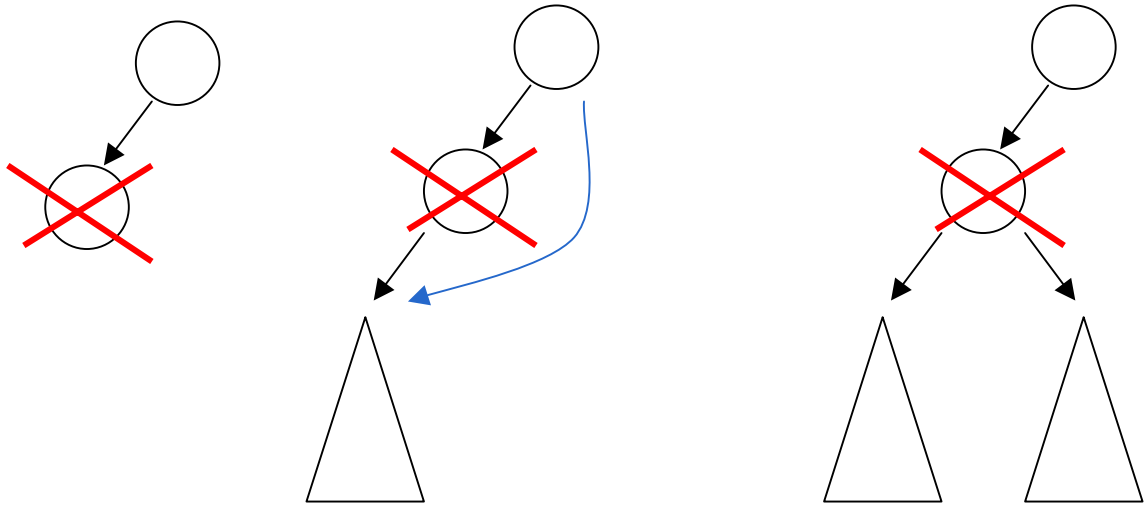
a) den zu entfernenden Knoten suchen

b) Knoten löschen. Dabei gibt es 3 Fälle:

1) der Knoten hat keinen Teilbaum $\Rightarrow$ Knoten löschen

2) der Knoten hat einen Teilbaum

3) der Knoten hat zwei Teilbäume (später)



Löschen: komplizierter Fall

a) den zu entfernenden Knoten suchen

b) Knoten löschen. Dabei gibt es 3 Fälle:

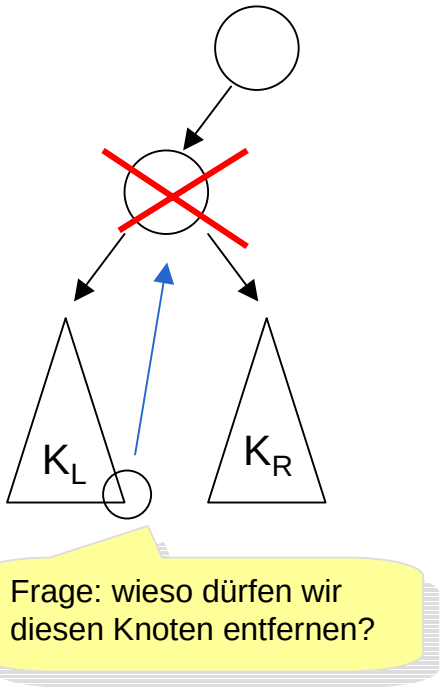
1) der Knoten hat keinen Teilbaum $\Rightarrow$ Knoten löschen ✓

2) der Knoten hat einen Teilbaum ✓

3) der Knoten hat zwei Teilbäume

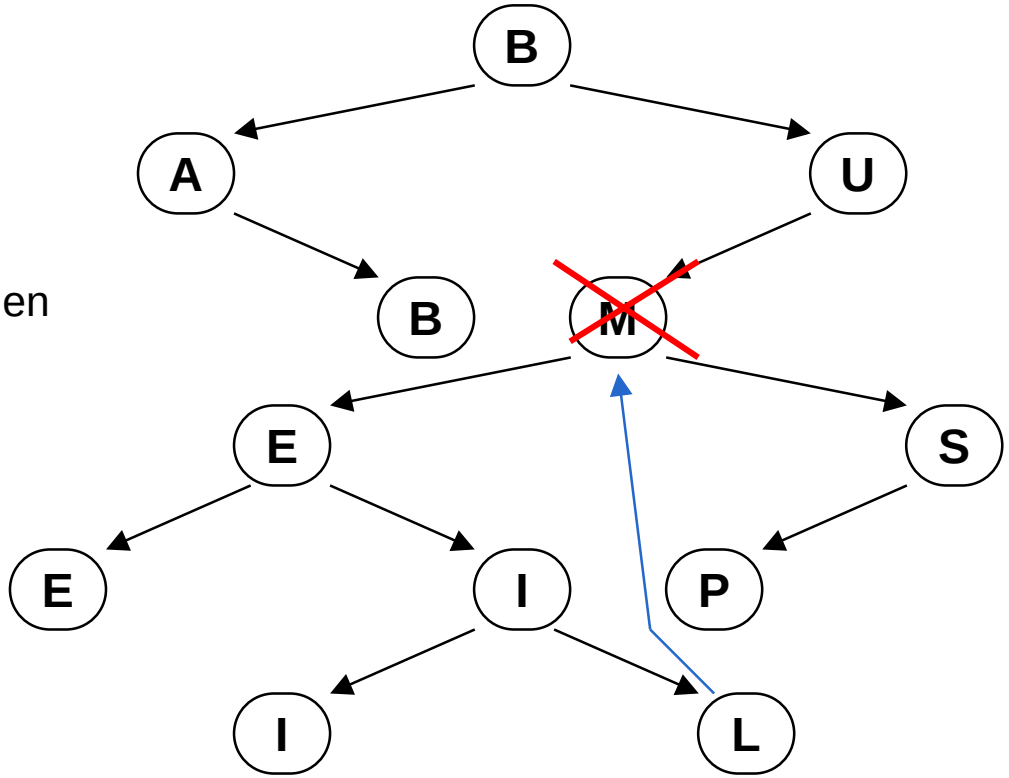
Fall 3: Es muss ein Ersatzknoten mit Schlüssel k gefunden werden, so dass gilt: $K_L <= k$ und $K_R > k$

Lösung: der Knoten, der im linken Teilbaum ganz rechts liegt.



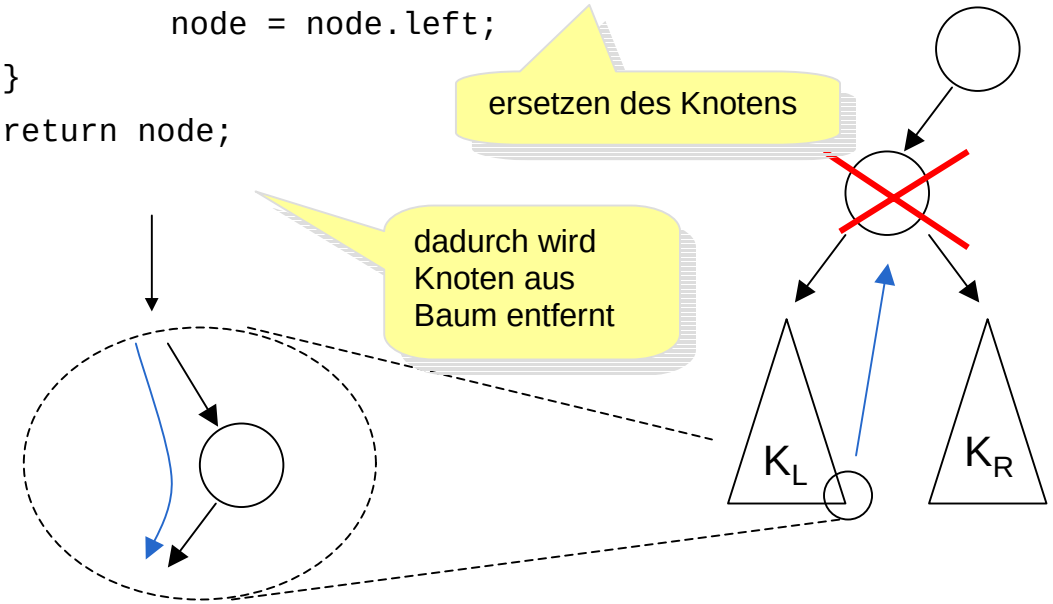
Löschen Beispiel

- Es soll M gelöscht werden.
- vom linken Teilbaum wir das Element ganz rechts als Ersatz genommen, i.e. L.
- L kann einfach aus seiner ursprünglichen Position herausgelöst werden, da es maximal einen Nachfolger hat.



Finden von Ersatzknoten

```
// find node to replace
 private TreeNode<T> findRepAt(TreeNode<T> node, TreeNode<T> rep) {
      if (node.right != null) {
               node.right = findRepAt(node.right,rep);
      } else {
               rep.element = node.element;
               node = node.left;
      }
      return node;
 }
```



Löschen Code

```
// remove node
private TreeNode<T> removeAt(TreeNode<T> node,
                        T x,TreeNode<T> removed ) {
     if (node == null) {
      return null;
     } else {
      if (x.compareTo(node.element) == 0) {
          // found
          removed.element = node.element;
          if (node.left == null) {
            node = node.right;
          } else if (node.right == null) {
            node = node.left;
          } else {
            node.left = findRepAt(node.left,node);
          }
      } else if (x.compareTo(node.element) < 0) {
          // search left
          node.left = removeAt(node.left, x, removed);
      } else {
          // search right
          node.right = removeAt(node.right, x, removed);
      }
      return node;
     }
  }
```

```
// find node to replace
 private TreeNode<T> findRepAt(TreeNode<T> node,
                        TreeNode<T> rep) {
    if (node.right != null) {
     node.right = findRepAt(node.right,rep);
    } else {
     rep.element = node.element;
     node = node.left;
    }
    return node;
 }

 public T remove(T x) {
    TreeNode<T> removed = new TreeNode<T>(null);
    root = removeAt(root, x, removed);
    return removed.element;
 }
```

Suchen (Ausblick)

Suche x im Baum B:

- Wenn x == Wurzelelement gilt, haben wir x gefunden.
- Wenn x > Wurzelelement gilt, wird die Suche im rechten Teilbaum von B fortgesetzt, sonst im linken Teilbaum.

```
public Object search(TreeNode<T> node, T  x) {
  if (node == null) return node;
  else if (x.compareTo(node.element) == 0)
    return node;
  else if (x.compareTo(node.element) <= 0)
    return search(node.left,x);
  else
    return search(node.left,x);
}
```

- Bei einem vollen Binärbaum müssen lediglich Log_2 Schritte durchgeführt werden bis Element gefunden wird.
- Entspricht Aufwand des Binäres Suchen
- sehr effizient Bsp: 1000 Elemente -> 10 Schritte

Zusammenfassung

School of Engineering

- Allgemeine Bäume
  - rekursive Definition
  - Knoten (Vertex) und Kanten (Edge)
  - Eigenschaften von Bäumen
- Binärbäume: Bäume mit maximal zwei Nachfolgern
  - Traversal, Visitor
  - verschiedene Traversierungsarten
  - Inorder, Preorder, Postorder, Levelorder
- sortierte Binärbäume Einführung
  - Einfügen
  - Löschen
  - Suchen