Schnelles Suchen und Hashing

- Sie wissen, wie schnell gesucht werden kann
- Sie kennen die Begriffe: Vor-/Nachbedingung und Invariante
- Sie wissen, wie binäres Suchen funktioniert
- Sie wissen, wie Hashing funktioniert
- Sie kennen die Java Datenstruktur Map und HashMap

Suchen

Beispiele wo gesucht werden muss

- Prüfen ob ein Wort in einem Text vorkommt
- Zählen wie oft ein Wort in einem Text vorkommt
- Überprüfen ob alle Worte korrekt geschrieben sind
- Finden einer Telefonnummer in einer Telefonbuch
- Prüfen ob die richte Zahlenkombination im Lotto gewählt wurde
- Prüfen ob eine Kreditkartennummer gesperrt ist
- Prüfen ob in zwei Listen die gleichen Elemente vorkommen

Vor-, Nachbedingung und Invariante

Vorbedingung

- Aussage, die vor dem Ausführen der Programmsequenz gilt

Nachbedingung

- Aussage, die nach dem Ausführen der Programmsequenz gilt
- {x >= 0} y = sqrt(x) {y = $\sqrt{x}$, x >= 0}

Vorbedingung

Nachbedingung

Invariante

Invariante

Bereich

Aussage

```
k = 0;
```

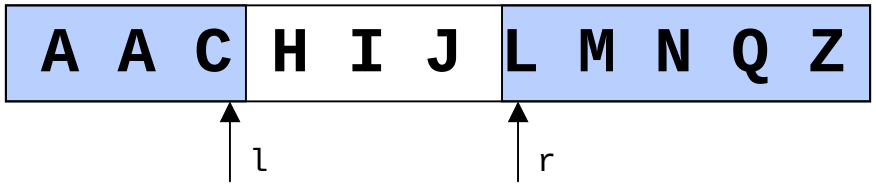
$\{\forall x_i; i < k; x_i \neq S\} \wedge k = 0$

```
while (x[k] != S && k < x.length) k++;
```

$\{\forall x_i; i < k; x_i \neq S\} \wedge \{x_k = S \vee k >= x.length\}$

Verneinung der Schleifenbedingung

Binäres Suchen in einem sortierten Array

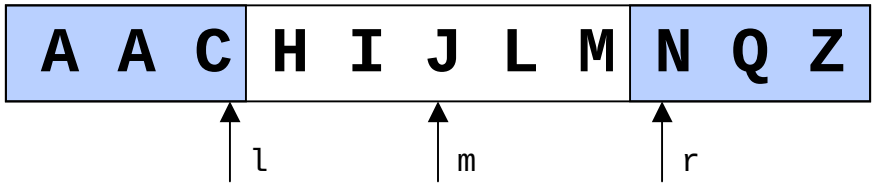


- Gegeben sei ein **sortiertes Array** von Werten (Buchstaben)
- Wie kann ein Wert S in so einem Array effizient gesucht werden?

- Führe zwei Indizes ein: l und r

- Invariante: $\forall k,n; k \leq l, n \geq r; a[k] < S \wedge a[n] > S$

… Binäres Suchen in einem sortierten Array



nehme m als Index zwischen l und r

- falls a[m] < S -> l = m
- falls a[m] > S -> r = m
- falls a[m] == S -> gefunden
- falls l+1 >= r -> keine Elemente mehr zwischen l und r -> nicht gefunden

… Binäres Suchen in einem sortierten Array

```
static int binary(int[] a, int s) {
  int l = -1;
  int r = a.length;
  {inv && l == -1 && r == a.length}
  while (l != r && a[m] != s) {
    int m = (l + r) / 2;
    else if (a[m] < s) l = m;
    else if (a[m] > s) r = m;
  }
  {inv && (l == r || a[m] == s)}
  return (a[m] == s)?m:-1;
}
```

- in jedem Durchgang wird r - l halbiert -> $\log_2$ Schritte
- Aufwand: $O(\log_2)$

Suche in mehreren Listen

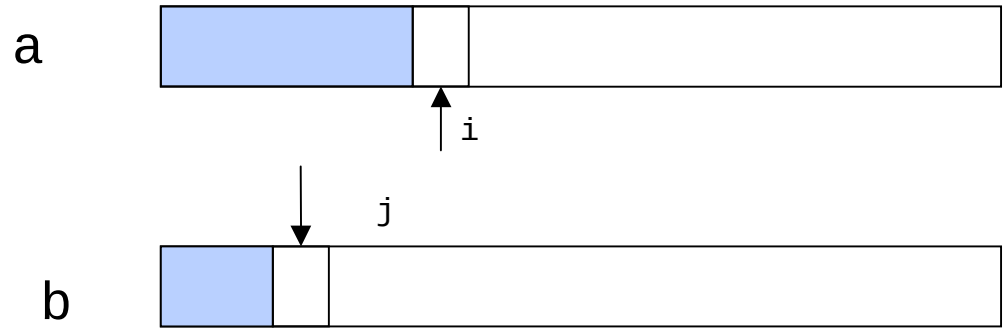
- Fragen:
  - Welche der 300 Reichsten der Schweiz beziehen Krankenkassenvergünstigung?
  - Welcher Student, dessen Eltern reich sind, bekommt ein Stipendium?
  - Welcher Facebook Benutzer ist auf XING und hat ***Das Kapital*** von Karl Marx bei Amazon gekauft?

Einfacher Algorithmus

```
static int indexOf(String[] a, String[] b) {
  for (int i = 0; i < a.length; i++) {
    for (int j = 0; j < b.length; j++) {
      if(a[i].equals(b[j])) return i;
    }
  }
  return -1;
}
```

- doppelt geschachtelte Schleife
- Aufwand O(n*m)
  - bei 2 * 10000 Elementen -> 10^8

Besserer Algorithmus wenn a und b sortiert



- ***Invariante*** $\forall k,n;k<j,n<i;b[k]\neq a[n]$
- Invariante bleibt erhalten
- Bereich für den die Invariante gilt sukzessive erweitern
- *b[j] < a[i] ->* ∀k;k <= j;b[k] < a[i] *-> j um 1 erhöhen*
- *b[j] > a[i] ->* ∀n;n <= i;b[j] > a[n] *-> i um 1 erhöhen*

Schnelle Suche in zwei Arrays

```
static int indexOf(String[] a, String[] b) {
   int i = 0, j = 0;
     //{inv && i == 0 && j == 0}
   while (!a[i].equals(b[j]) && (i < a.length-1 || j < b.length-1)) {
     int c = a[i].compareTo(b[j]);
     if (c < 0 || j == b.length-1 ) i++;
     else if (c > 0 || i == a.length-1) j++;
   }
   // {inv && (i == a.length-1 && j == b.length-1) || (a[i] == b[j])}
   if (a[i].equals(b[j])) return i; else return -1;
 }
```

Schleife wird verlassen wenn diese Bedingung nicht mehr gilt-> Negation der Bedingung gilt am Schluss

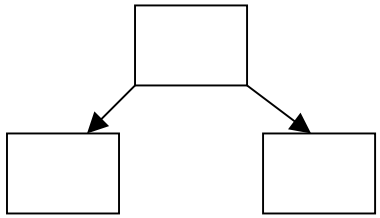
- i und j werden erhöht, so dass die Invariante erhalten bleibt
- Am Schluss gilt: Invariante & Abbruchbedingung der Schleife
- Aufwand O(n)

Aufwand für Suchen und Einfügen

- **sortierter Array**
  - Einfügen O(n/2)
  - binäres Suchen O($\log_2$(n))

- **lineare sortierte Liste**
  - Einfügen O(n/2)
  - Suchen O(n/2)

- **sortierter Binärbaum**
  - Einfügen O($\log_2$(n))
  - Suchen O($\log_2$(n))



Frage:

- Gibt es ein Verfahren, dessen Aufwand unabhängig von der Anzahl Elemente ist.

Schlüssel & Hashing

Schlüssel - Inhalt

Gegeben sei eine Menge von Datensätzen der Form

- Der Schlüssel kann ein Teil des Inhaltes sein
- Der Schlüssel besteht im einfachsten Fall aus einem String oder einem numerischen Wert.
- Mittels dem Schlüssel kann der Datensatz wiedergefunden werden.
- Bsp:
  - AHV-Nummer - Personen
  - Matrikel-Nummer- Studenten

- Aufgabe: Es sollen Daten (Objekte) in einen Behälter eingefügt und mittels ihrem Schlüssel wiedergefunden werden.

Menge der möglichen Schlüsselwerte klein

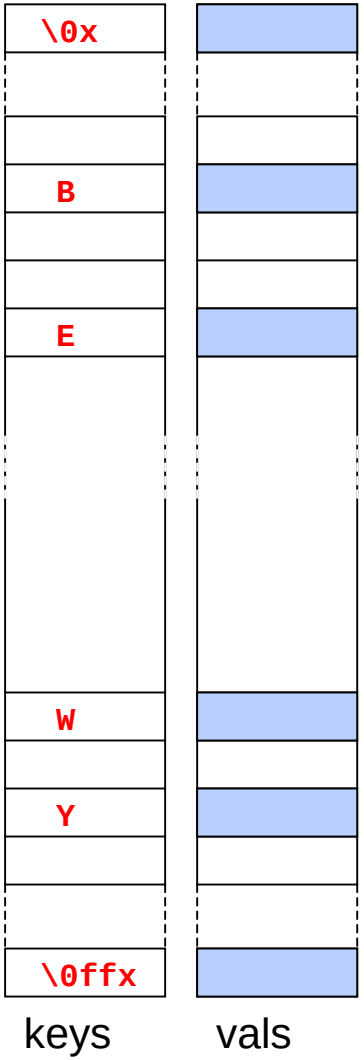
Werte in Array an ihre Indexposition (bestimmt durch z.B. ASCII Code) speichern

- Wertebereich A..Z
- Werte B, E, W, Y

- Einfach char[] h = new char[256];

- Einfügen h[c] = c;
- Suchen: c = h[c];

- Aufwand
  - Einfügen O(1)
  - Suchen O(1)



Idee : Hashing

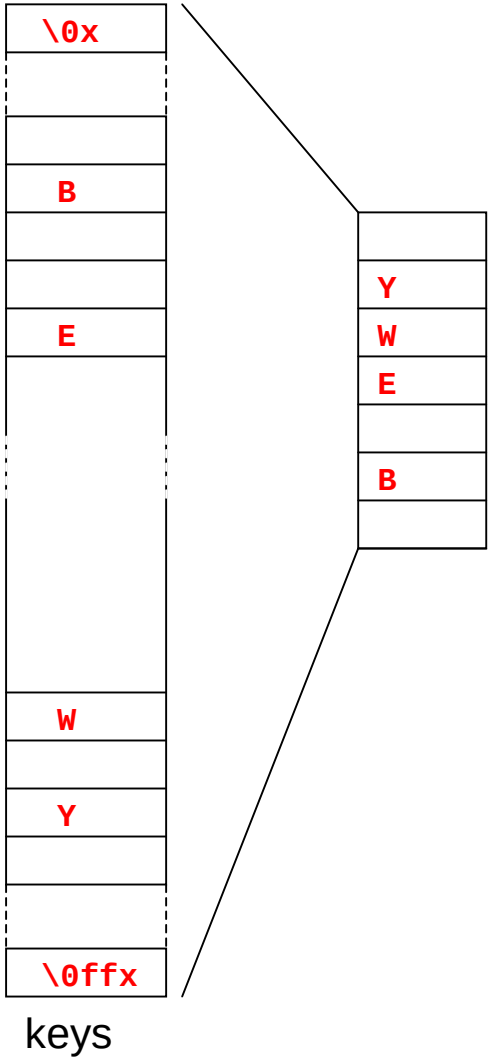
Problem: der Array ist nur schwach belegt

- geht noch für Buchstaben
- was aber bei Zahlen? (>2^{32}) oder Strings

- Lösung:
  - Es wird eine Funktion verwendet, welche den grossen Wertebereich auf einen kleineren abbildet.

  Einfache Funktion: `X modulo tableSize`
  - -> eine Zahl zwischen 0 und tableSize-1

  - Eine solche Funktion nennt man ***Hash Funktion***.



Hash Funktion

Problem 1:

- Aus Hash-Wert kann der ursprüngliche Wert nicht mehr bestimmt werden, i.e. $\notin h^{-1}(k)$

Lösung

$\Rightarrow$ **Originalwert** in Tabelle (z.B. zusätzlicher Array) speichern

Problem 2:

- Zwei unterschiedliche Objekte können den gleichen Hash Wert haben. d.h. sie müssten an der gleichen Stelle gespeichert werden $\Rightarrow$ **Kollision**

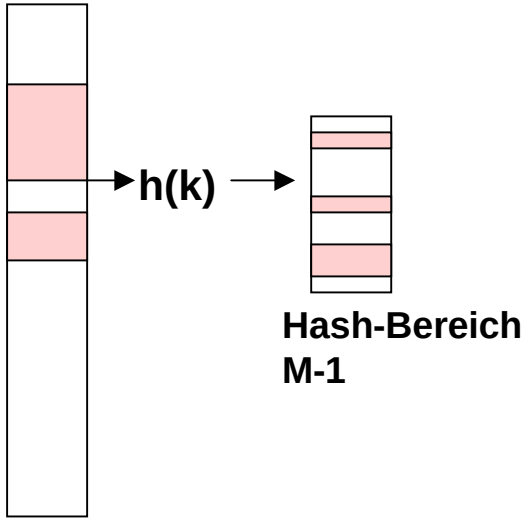
Lösung:

- Kollision werden vermieden - oder verringert
- Kollision wird aufgelöst
- verschiedene Verfahren zur Auflösung (später):
  - *linear/quadratic probing, …*

Hash Funktion

- Der grosse Schlüsselbereich wird mittels der Hash-Funktion auf einen kleinen Bereich abgebildet

- Problem
  - **Massierungen (Clustering)** im (Schlüssel-)Wertebereich ->: kann zu gleichen Hash-Werten führen ⇒ **Kollisionen**
- Hash = Durcheinander
  - die Hash-Funktion bringt den Schlüssel so durcheinander, dass er möglichst **gleichmässig** auf den ganzen Wertebereich des Schlüssels abgebildet wird
- Wirklich gute Hashfunktionen sind nicht immer einfach zu finden
- Zwei gebräuchliche Hashfunktionen
  - **h(k) = k % M | M ∈ Primzahl**
  - **h(k) = (k * N) % M | N,M ∈ Primzahlen**
    - *Primzahl M <= Schlüsselbereich*



Hashtable ohne Kollisionen

```
public class Hashtable {
  final int MAX = 100;
  final int INVALID = Integer.MINVALUE; // keys array noch mit diesem Wert initialisieren
  int[] keys = new int[MAX];
  int[] vals = new int[MAX];

  private int h(int key) {
     return key * 13 % 97;
  }

   public void put(int key, int val) {
      int h = h(key);
      if (keys[h] == INVALID) {
         keys[h] = key;
         vals[h] = val;
      }
      else {/* COLLISION "/}
   }

   public int get(int key) {
      int h = h(key);
      if (keys[h] == key) {
        return vals[h];
     }
      else return INVALID;
   }
}
```

Hash Funktion

Überprüfe ob Feld frei

Speichere Zahl

Überprüfe ob Schlüssel korrekt

Hole Zahl

Hashing von Strings

School of Engineering

*1	*256	*256 ^{2}	*256 ^{3}
B	A	U	M

- Hashfunktion = ASCII Wert $\times$ Position 256^n

- Es entstehen sehr grosse Zahlen:
  - Ein vier Zeichen langer String führt bereits zu einer Zahl in der Grössenordnung von $256^4 = 2^{32}$, was nur weni32-Bit Integer ist.

- In der Praxis werden deshalb Polynome zur Umwandlung von Strings verwendet (Horner Schema): $\mathbf{A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X^1 + A_0X^0}$
  - kann als $(((A_3)X + A_2)X + A_1)X + A_0$ gerechnet werden. Trotzdem bleibt das Overflow-Problem.

- Modulo Arithmetik
  - (a + b) mod x = a mod x + b mod x

- In Java/C automatisch durch nicht behandelten Überlauf
  - bei Überlauf in Java kehrt sich das Vorzeichen bei der Interpretation des Bitmusters als *Signed* (!)

Die hashCode Methode von Object

- Hashwerte und equals müssen folgenden "Vertrag" (Contract) einhalten
- 1) Ein Objekt muss während seiner **Lebensdauer immer denselben Hashwert** zurückliefern, solange der Zustand (Wert) des Objekts nicht verändert wurde
  - Wenn aber die JVM neu gestartet oder eine andere JVM verwendet wird darf der Hashwert ändern!
- 2) wenn **equals == true**, dann **müssen** die Objekte **denselben Hashwert** liefern
- 3) wenn **equals == false**, dann **sollten** die Objekte **unterschiedliche Hashwerte** liefern (d.h. Haswerte müssen nicht eindeutig sein).

- Zusätzlich
- wenn **equals == true**, dann **muss** compareTo == 0 liefern
- wenn **equals == false**, dann **muss** compareTo != 0 liefern

Immer *equals*, *compareTo* und *hashCode* zusammen überschreiben

Hashcode von Klassen

- Bei Klassen kann der Hashcode aus den Werten der Felder berechnet werden

```
public class Employee {
    int        employeeId;
    String     name;
    Department dept;

    @Override
    public int hashCode() {
        int hash = 1;
        hash = hash * 13 + employeeId;
        hash = hash * 17 + name.hashCode();
        hash = hash * 31 + (dept == null ? 0 : dept.hashCode());
        return hash;
    }
}
```

Ohne Modulo, da abhängig von Anwendung d.h. Grösse der Hashtabelle

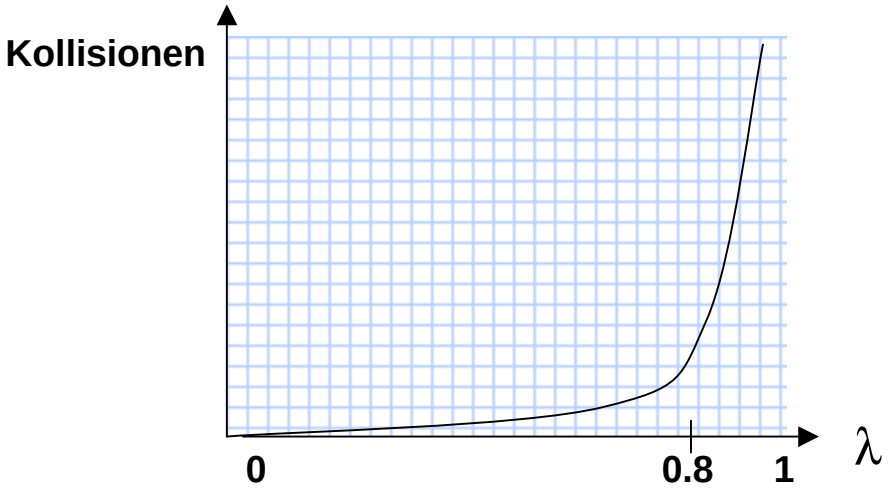
Primzahl

Kollisionen

Kollisionen

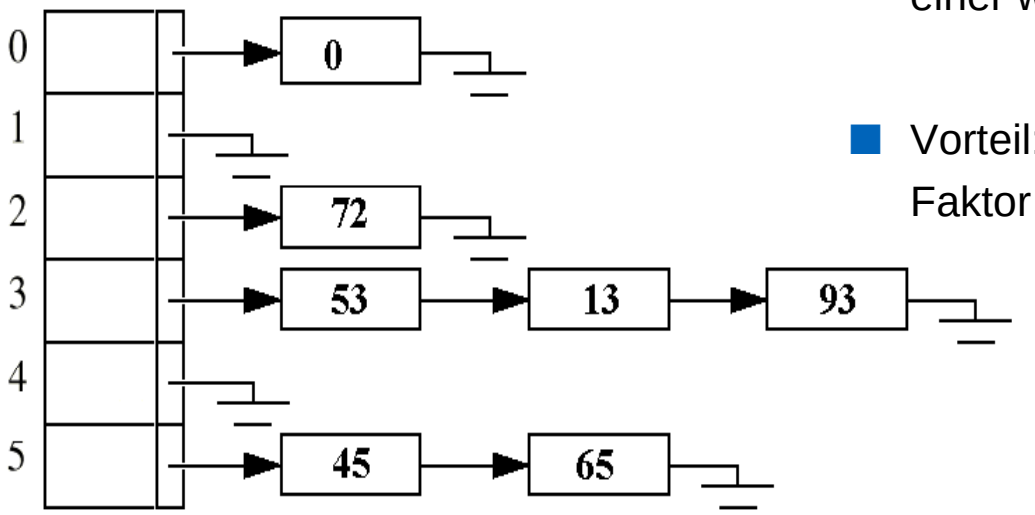
- Anzahl Kollisionen hängt von der Güte der Hash-Funktion und der Belegung der Zellen ab

- Der Load-Faktor λ
  - sagt wie stark der Hash-Bereich belegt ist
  - bewegt sich zwischen 0 und 1.
  - # Kollisionen ist abhängig von λ und h: f(h, λ)



Kollisionsauflösung 1 :Separate Chaining

Hashtable lediglich als Ankerpunkt für Listen aller Objekte, die den gleichen HashWert haben : **Überlauflisten** (*Separate Chaining*)



- Nachteil: Overhead durch Verwendung einer weiteren Datenstruktur
- Vorteil: Funktioniert auch noch bei Load-Faktor nahe (oder grösser) als 1

Übung

Gegeben sind:

- eine Hashtabelle der Grösse 10
- eine Hash-Funktion h(x) = x mod 10
- Input: 4371, 1323, 6173, 4199, 4344, 9679, 1989.

Wie sieht die Tabelle aus, nachdem der Input unter Verwendung von Separate Chaining Hashing verarbeitet wurde?

Kollisionsauflösung 2: Open Addressing

Open Addressing: Techniken, wo bei Kollision eine freie Zelle sonstwo in der HashTable gesucht wird.

⇒ Setzt einen Load-Faktor < ~0.8 voraus.

- **lineares Sondieren (*Linear Probing):***

  sequentiell nach nächster freier Zelle suchen
  (mit *Wrap around*).

- ***quadratisches Sondieren (Quadratic Probing):***

  in wachsenden Schritten der Reihe nach $F+1, F+4, F+9, \ldots, F+i^2$ prüfen
  (mit *Wrap around*).

Linear Probing 1

- in eine Hash-Tabelle mit 10 Feldern werden der Reihe nach 89, 18, 49, 58 und 9 eingefügt.

```
hash( 89, 10 ) = 9
hash( 18, 10 ) = 8
hash( 49, 10 ) = 9
hash( 58, 10 ) = 8
hash(  9, 10 ) = 9
```

	After Insert 89	*After Insert 18*	*After Insert 49*	*After Insert 58*	*After Insert 9*
0			49	49	49
1				58	58
2					9
3					
4					
5					
6					
7					
8		18	18	18	18
9	89	89	89	89	89

Hash-Funktion Input modulo Tabellengrösse

Bei zunehmendem Load Faktor dauert es immer länger bis eine Zelle gefunden wird. (Einfügen und Suchen)

find funktioniert wie insert: Element wird in Tabelle ausgehend vom HashWert gesucht bis Wert gefunden oder leere Zelle.

Linear Probing 2

Performance

ziemlich schwierig zu bestimmen, da der Aufwand nicht nur vom Load Faktor, sondern auch von der Verteilung der belegten Zellen abhängt, aber i.d.R. O(1)

Phänomen des Primary Clustering:

mussten einmal freie Zellen neben dem Hash-Wert belegt werden, steigt die Wahrscheinlichkeit, dass weiter gesucht werden muss für:

- alle Ausgangswerte mit gleichem Hash-Wert
- all jene, deren Hash-Wert in eine der nachfolgenden Zellen verweist.

Folge

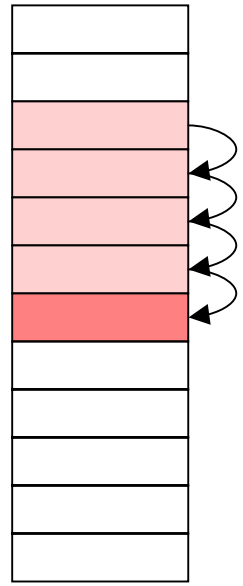
- Verlängerung des durchschnittlichen Zeitaufwandes zum Sondieren
- erhöhte Wahrscheinlichkeit, dass weitere Sondieren nötig wird

⇒ Bei hohem Load Faktor/ungünstigen Daten bricht die Performance ein!

Linear Probing 3

```
int findPos(Object x ) {
    int currentPos = hash(x);

    while( array[ currentPos ] != null &&
       !array[currentPos].element.equals( x ) ) {
        currentPos = (currentPos  + 1) % array.length ;
    }
    return currentPos;
}
```



zur Bestimmung einer Ausweichzelle wird einfach die nächste genommen ->primary Clustering Phänomen

Übung

Gegeben sind:

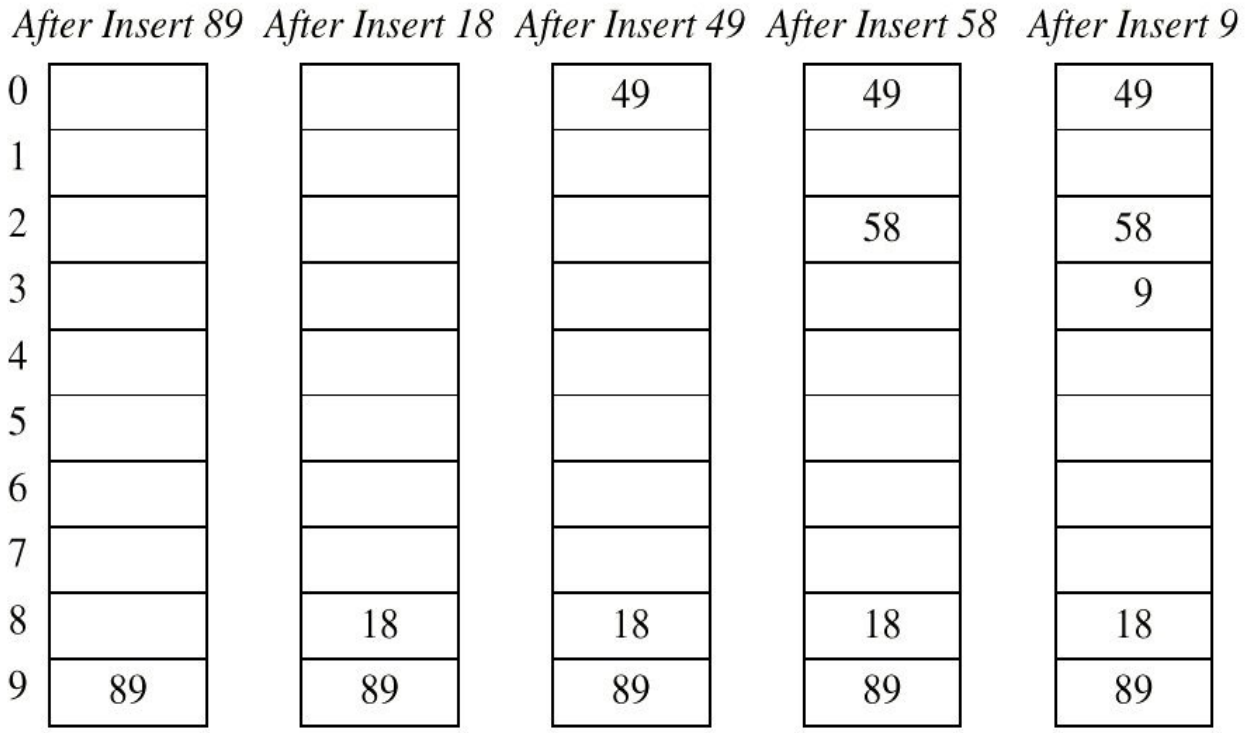
- eine Hashtabelle der Grösse 10
- eine Hash-Funktion H(X) = X mod 10
- Input: 4371, 1323, 6173, 4199, 4344, 9679, 1989.

Wie sieht die Tabelle aus, nachdem der Input unter Verwendung einer linearen Sondiermethode verarbeitet wurde?

Quadratic Probing 1

in eine Hash-Tabelle mit 10 Feldern werden der Reihe nach 89, 18, 49, 58 und 9 eingefügt.

```
hash( 89, 10 ) = 9
hash( 18, 10 ) = 8
hash( 49, 10 ) = 9
hash( 58, 10 ) = 8
hash(  9, 10 ) = 9
```



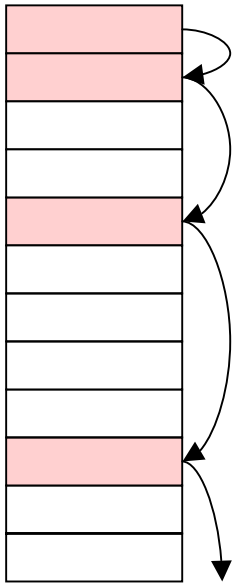
- Hash-Funktion Input modulo Tabellengrösse
- jetzt bleiben Lücken in Hash-Tabelle offen
- die zuletzt eingefügte 9 findet ihren Platz unbeeinflusst von der zuvor eingefügten 58.

Quadratic Probing 2

```
int findPos( Object x )
{
    int collisionNum = 0;
    int currentPos = hash(x);

    while( array[currentPos] != null &&
       !array[currentPos].element.equals( x ) )
    {
       currentPos += 2 * ++collisionNum - 1;
        currentPos = currentPos % array.length;
    }

    return currentPos;
}
```



bessere Performance als lineares weil *primary Clustering* weniger auftritt.

Übung

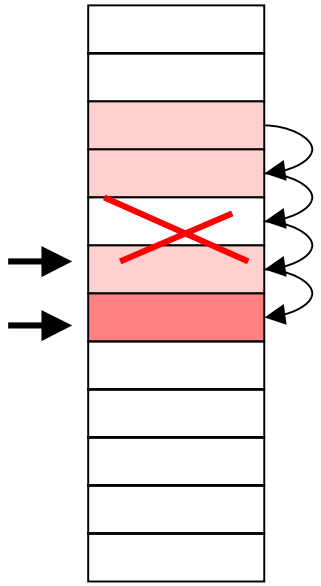
Gegeben sind:

- eine Hashtabelle der Grösse 10
- eine Hash-Funktion H(X) = X mod 10
- Input: 4371, 1323, 6173, 4199, 4344, 9679, 1989.

Wie sieht die Tabelle aus, nachdem der Input unter Verwendung einer quadratischen Sondiermethode verarbeitet wurde?

Löschen in Hashtabellen

- Werte können nicht einfach gelöscht werden, da sie die Folge der Ausweichzellen unterbrechen.
- Wenn ein Wert gelöscht wird, müssen alle Werte, die potentielle Ausweichzellen sind, gelöscht und wieder eingefügt werden (rehashing).
- Zweite Möglichkeit: gelöschte Zelle lediglich als "gelöscht" markieren



Vor- und Nachteile von Hashing

Vorteile

- Suchen Einfügen in Hash-Tabellen sehr effizient
- "Einfache" Binären Bäumen können bei ungünstigen Inputdaten degenerieren, Hash-Tabellen kaum.
- Der Implementationsaufwand für Hash-Tabellen ist geringer als derjenige für ausgeglichene binäre Bäume.

Nachteile

- das kleinste oder grösste Element lässt sich nicht einfach finden
- Geordnete Ausgabe nicht möglich
- die Suche nach Werten in einem bestimmten Bereich oder das Finden z.B. eines Strings, wenn nur der Anfang bekannt ist, ist nicht möglich

Hash-Tabellen sind geeignet wenn: die **Reihenfolge** nicht von Bedeutung ist nicht nach **Bereichen** gesucht werden muss die **ungefähre (maximale) Anzahl** bekannt ist.

Extendible Hashing

Platz in Hashtabelle reicht nicht mehr

- Was tun, wenn die Hashtabelle überläuft oder sogar nicht mehr in den Hauptspeicher passt.

Hashtabelle passt noch in den Hauptspeicher

- Überlaufketten -> Performance beim Zugriff wird schlechter

- In neue, genügend grosse Hashtabelle umkopieren (rehashing mit neuer Hashfunktion) ->relativ teure Operation

Hashtabelle passt nicht mehr in den Hauptspeicher

- Extendible Hashings:
  - Der Schlüsselwertebereich kann nachträglich vergrössert werden.
  - Funktioniert mit Files/Blockstruktur (vergleiche B-Bäume)

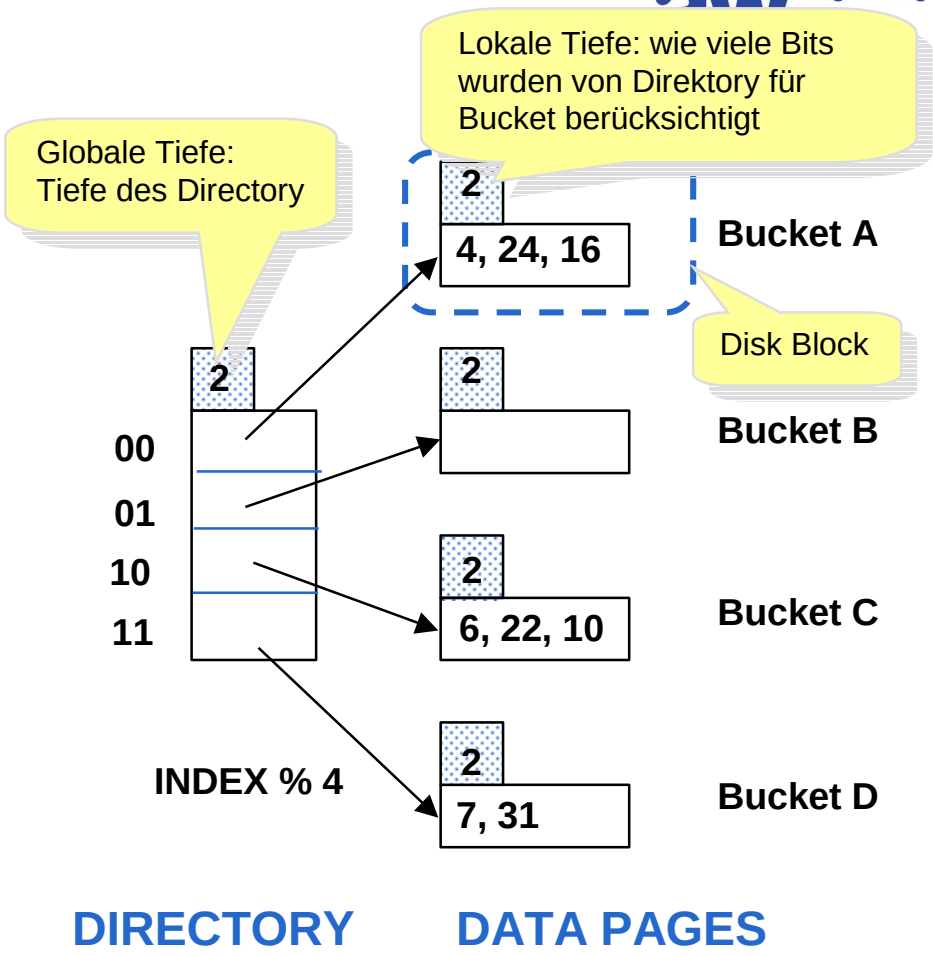
Extendible Hashing

School of Engineering

- Naive Implementation einer grossen Hashtabelle als File festgelegter Grösse
  - Rehashing würde bedeutet, dass sämtliche Schlüssel bzw. das ganze File neu geschrieben/umorganisiert werden muss.
- Idee: verwende Verzeichnis von Verweisen zu "Buckets" (=Behälter)
  - Grosse Buckets: z.B. Bucket Size = Disk Block (2048) -> kleine Schlüssel im Verzeichnis
- Verzeichnis enthält lediglich letzten n-Bits des Schlüssels und ist wesentlich kleiner (als alle Behälter zusammen)
  - kann in den Hauptspeicher geladen werden
  - kann einfacher verdoppelt werden
- Hashfunktion wird entsprechend der berücksichtigten Bits im Verzeichnis angepasst

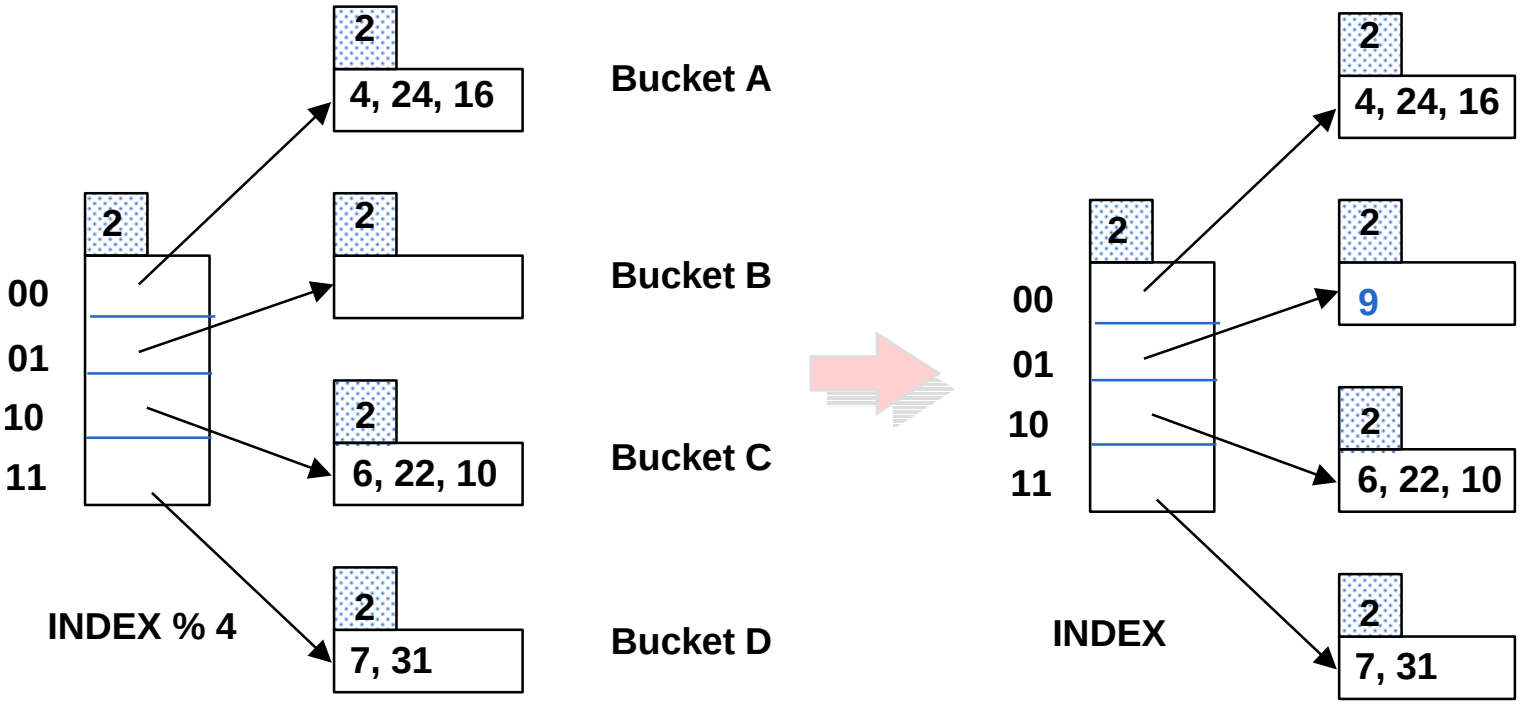
Beispiel

- Verzeichnis ist Array der grösse 4.
- Um das Bucket zu finden, suche im Index die letzten (`*global depth*' # bits of **h**(*r*);
  - Bsp: Wert = 6 binary 110; dann ist Zeiger auf Bucket im Verzeichniseintrag 10
  - = 6 % 4



- **Insert**: falls Bucket voll, dann *split* (*neue Seite und neu verteilen der Werte*).
- Falls notwendig, das Verzeichnis verdoppeln; kann bestimmt werden, durch den Vergleich von globaler zu lokaler Tiefe

Einfügen des neuen Eintrags 9

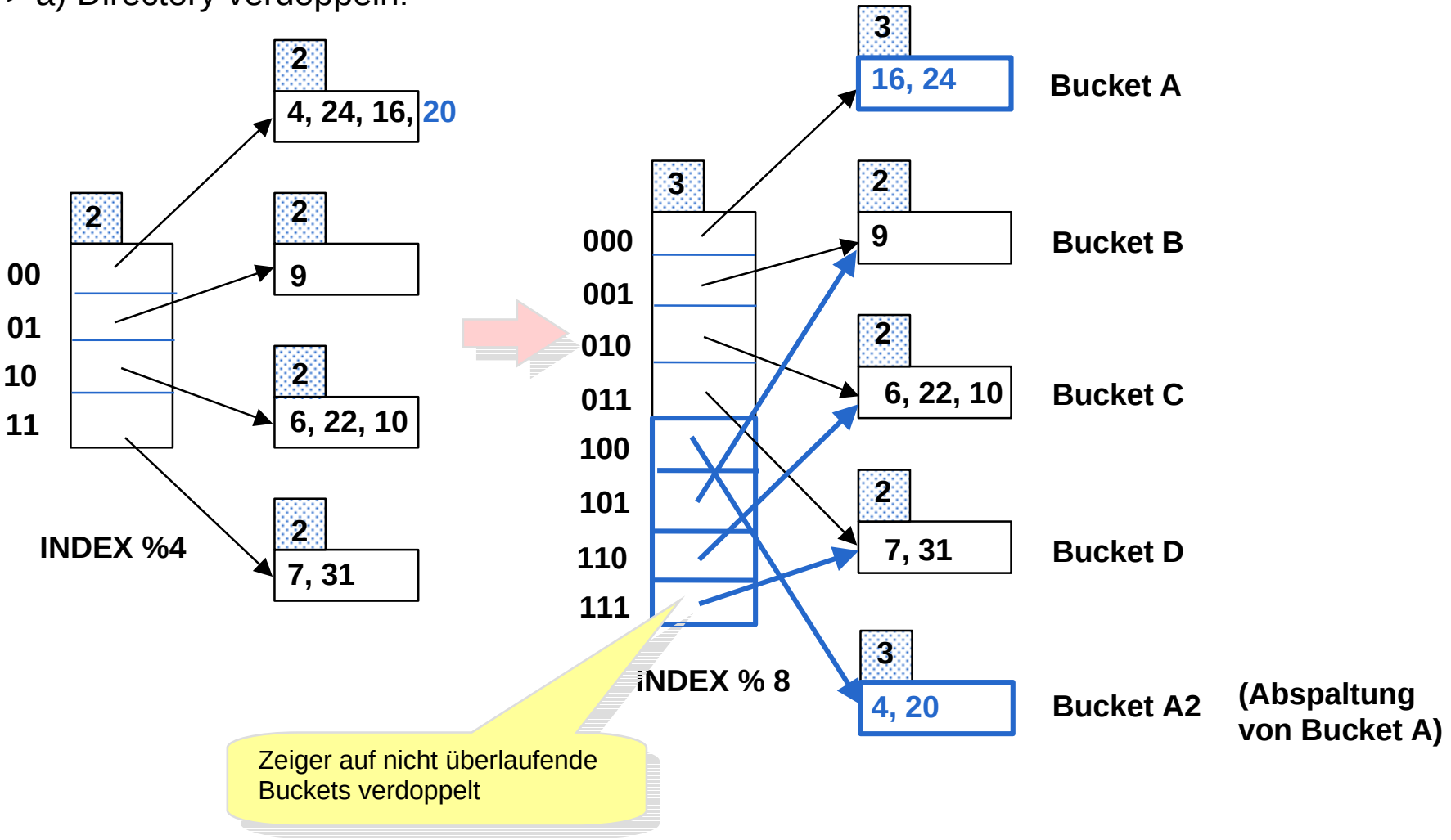


http://www.youtube.com/watch?v=TtkN2xRAgv4

Einfügen des neuen Eintrags 20

Bucket überlaufen mit lokaler Tiefe = globaler Tiefe
-> a) Directory verdoppeln!

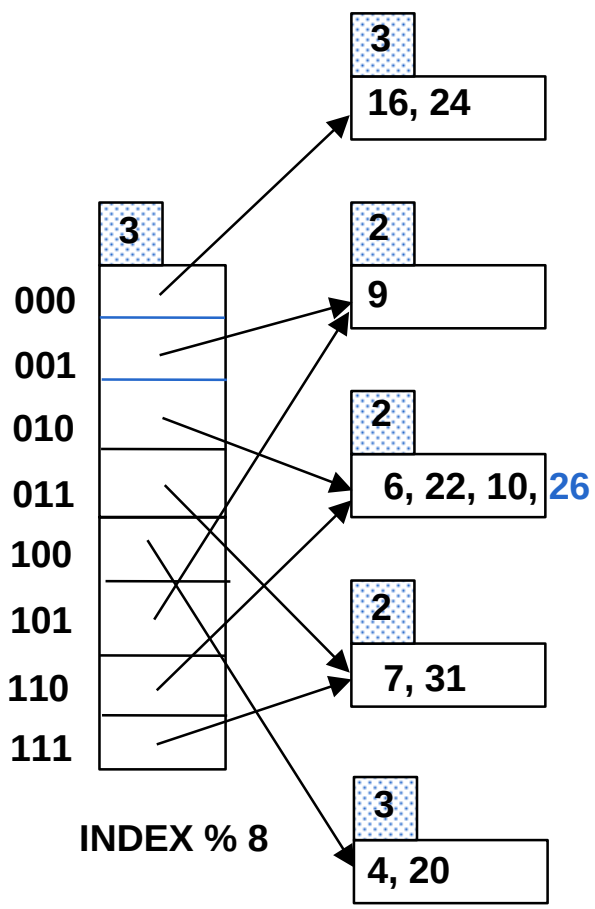
b)Werte **4, 24, 16, 20** neu verteilen (%8)

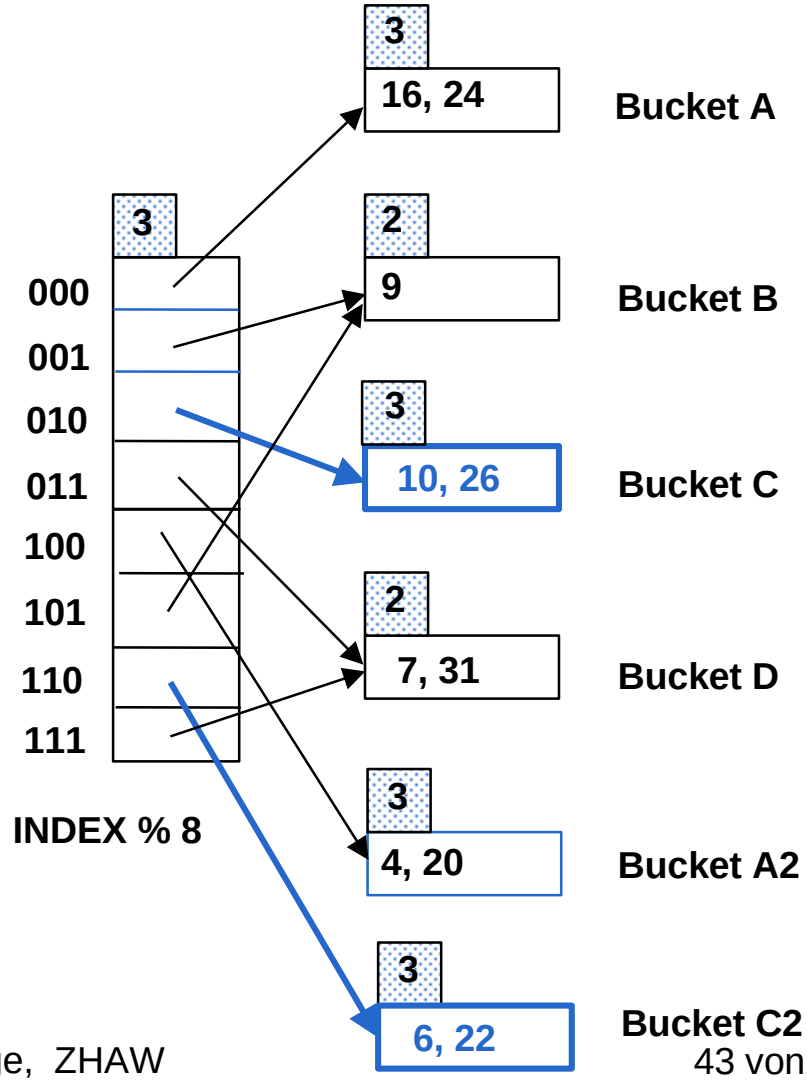


Einfügen des neuen Eintrags 26

Bucket überlaufen mit lokaler Tiefe < globaler Tiefe
-> a) Bucket aufteilen

b) Werte **6, 22, 10, 26** neu verteilen (%8)





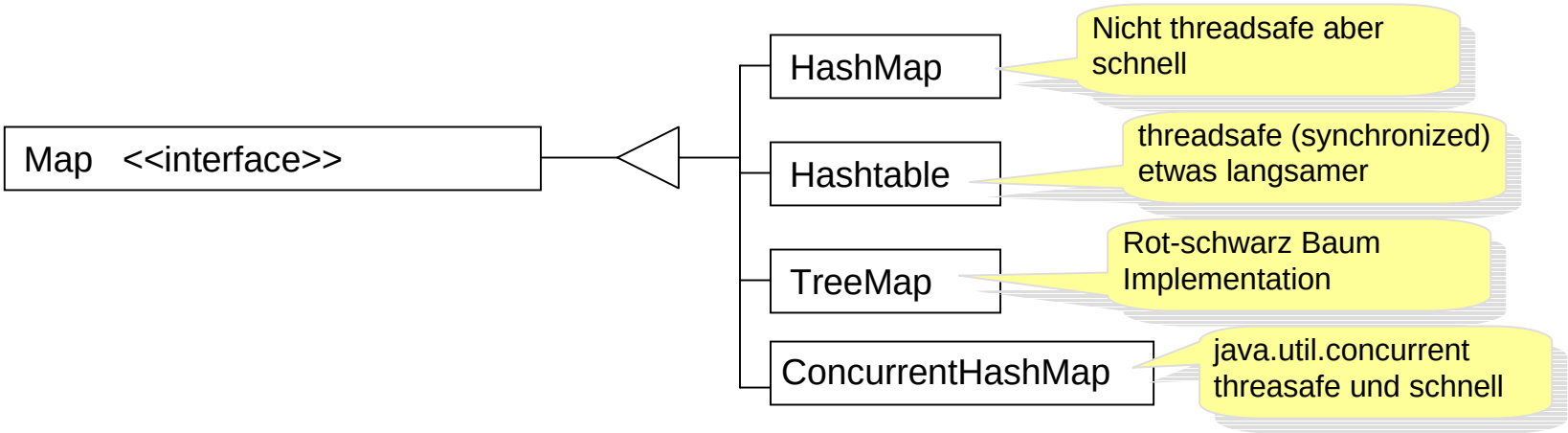
Implementation in Java

Maps

- Hashcode Bestimmung wird dem Object überlassen

```
Object {
    ...
  int hashCode();
     ...
}
```

- Maps können sind auf unterschiedliche Arten implementiert

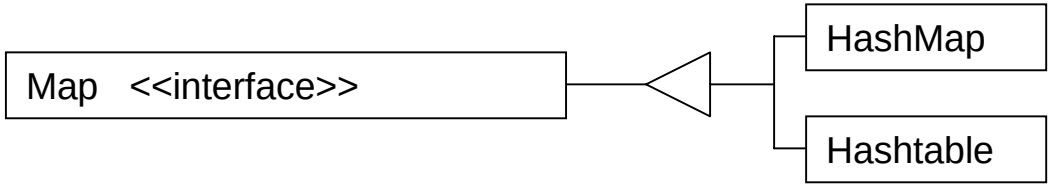


Map<K, V> Interface

`void clear()`	Löschen aller Elemente
`int size()`	Anzahl Elemente
`V put(K key, V value)`	Einfügen eines Elementes
`V get (Object key)`	Finden eines Elementes
`V remove(Object key)`	Löschen eines Elementes
`boolean containsKey(Object key)`	ist Element mit Schlüssel in Table
`boolean containsValue(Object value)`	hat ein Element den Wert
`Collection<V> values()`	alle Werte
`Set<K> keySet()`	alle Schlüssel als Set

```
for ( String elem : h.keySet() )
System.out.println( elem );
```

HashMap und Hashtable Implementation



Hashtable seit Java 1.0, synchronisiert, null-Werte nicht erlaubt

HashMap seit Java 1.2, nicht synchronisiert: Wrapper Klasse `Collections.synchronizedMap()` verwenden falls notwendig, null-Werte erlaubt

für neue Programme nur noch HashMap verwenden

Konstruktoren

`HashMap<K,V>()`	Erzeugen von HashMap
`HashMap<K,V>(int initialCapacity)`	Erzeugen von HashMap mit Grösse

Zusammenfassung

School of Engineering

- Suche
  - Einfache Suche
  - Invariante
  - Binäre Suchen
  - Suche in zwei Sammlungen
  - Vergleich der verschiedenen Datenstrukturen
- Hashing
  - Idee
  - Hashfunktion
    - *gute Hashfunktionen*
  - Kollisionsauflösung
    - *Überlauflisten*
    - *lineares Sondieren*
    - *quadratisches Sondieren*
  - Vor- und Nachteile