Logik-Programmierung 1

- Wissensrepräsentation
- Schlussfolgerung, Inferenz
- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik
- Resolutionskalkül

Teil der Folien mit freundlicher Genehmigung von
Prof. Dr. Rainer Malaka und Prof. Dr. Robert Marti

MS uses AI to improve "update experience"

- Have you ever had to stop what you were doing, or wait for your computer to boot up because the device updated at the wrong time?
- We heard you, and to alleviate this pain, if you have an update pending we've updated our reboot logic to use a new system that is more adaptive and proactive.

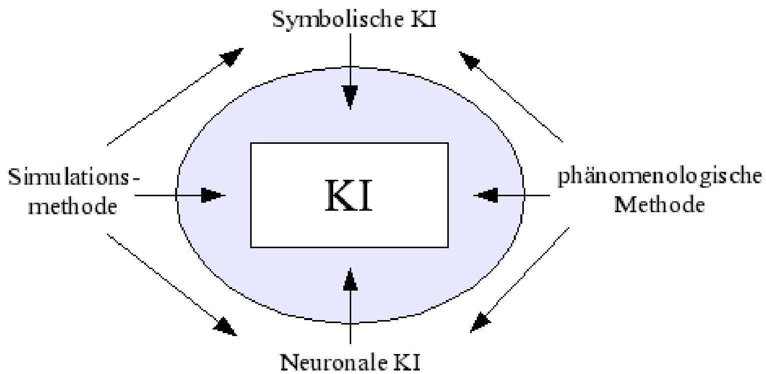
- We trained a predictive model that can accurately predict when the right time to restart the device is. Meaning, that we will not only check if you are currently using your device before we restart, but we will also try to predict if you had just left the device to grab a cup of coffee and return shortly after.

https://blogs.windows.com/windowsexperience/2018/07/25/announcgin-windows-10-insider-preview-build-17723-and-build-18204/#xtpvWfhkBc7yTCE7.97

Künstliche Intelligence

- Definition (Wikipedia)
  - Nicht eindeutig abgrenzbar, da schon "Intelligenz" nicht klar definiert.
    - *IQ = Intelligenzalter durch reales Alter ist eher ungeeignet*
  - Systeme so entwickeln, dass dieses eigenständig Probleme bearbeiten kann.

- "Schwache KI": nur auf Teilgebiet(en) besser (sehr einfach)
  - jeder Taschenrechner ist dem Mensch bez. arithmetischen Grundoperationen überlegen
- "Starke KI" : die gleichen intellektuellen Fertigkeiten von Menschen zu erlangen oder zu übertreffen

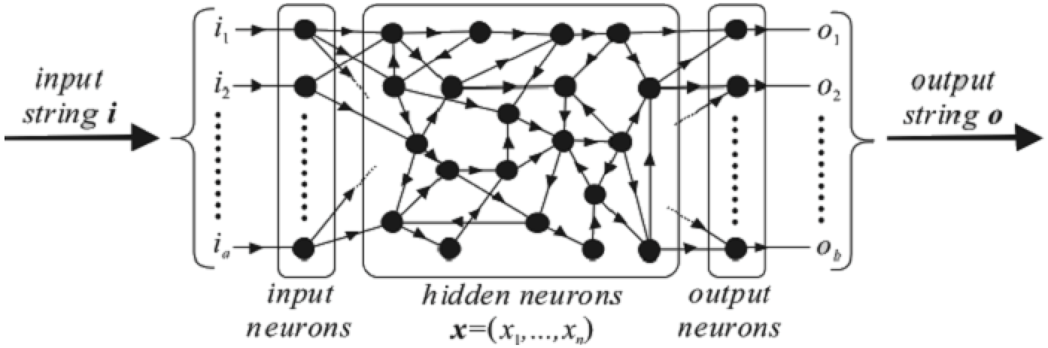


Forrest Gump: "Dumm ist wer dummes tut"

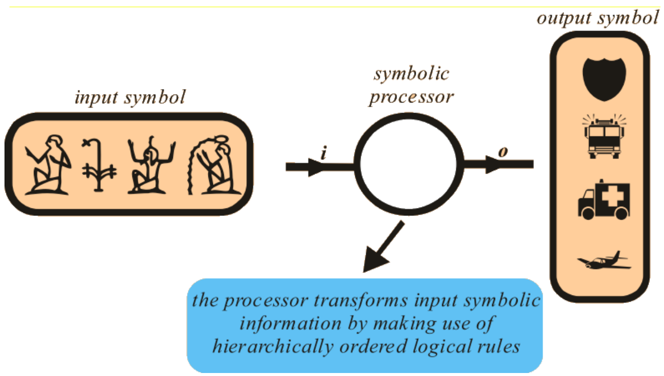
https://de.wikipedia.org/wiki/K%C3%BCnstliche_Intelligenz

Subsymbolischer vs Symbolischer Ansatz

- **Sub**symbolisch: niedriges Abstraktionsniveau



- Symbolisch: hohes Abstraktionsniveau



… Subsymbolischer vs Symbolischer Ansatz

- Subsymbolic: Google 2018: “We use machine learning to save you time by selecting the best photos of your four-legged friend and laying them out in a photo book,”
  LP21 (neu): Haustierunterscheidungskompetenz

- Maple:1980 (online: Wolfram Alpha) Symbolic Calculation System: Solves complex math problems.

```
> int(sin(x^2),x);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\pi}}\right)$$

```
> int(%,x);
```

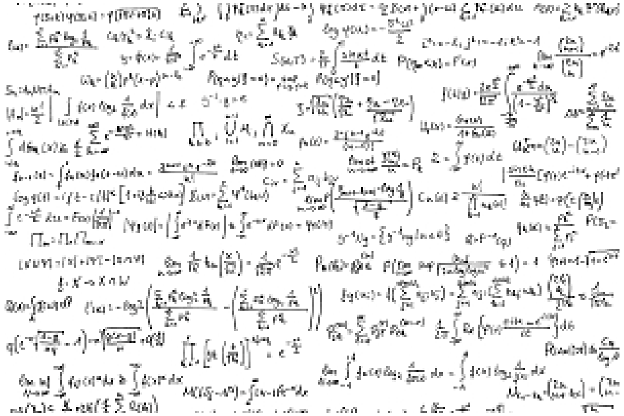
$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}\,x\,\mathrm{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\pi}}\right)}{\sqrt{\pi}}+\frac{\cos(x^2)}{\pi}\right)$$

```
>
```

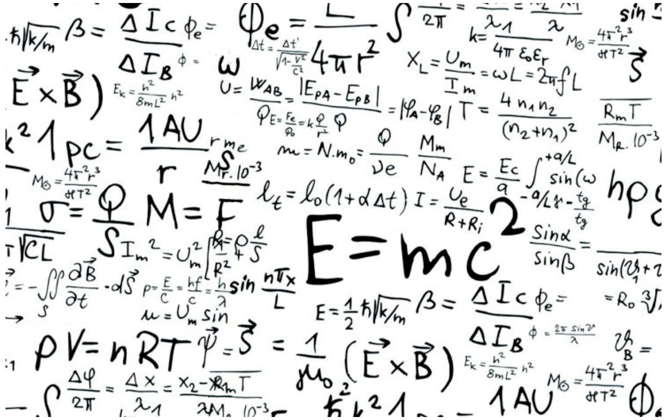
https://www.digitaltrends.com/mobile/google-lens-dog-cat-feature-for-photos/

Höhere kognitive Leistungen → symbolisch

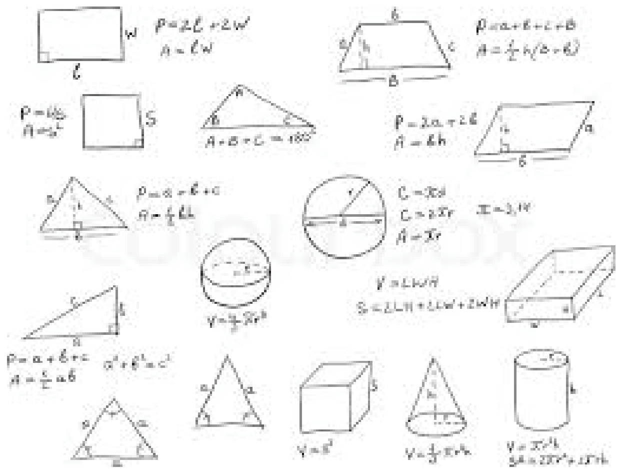
Mathematik



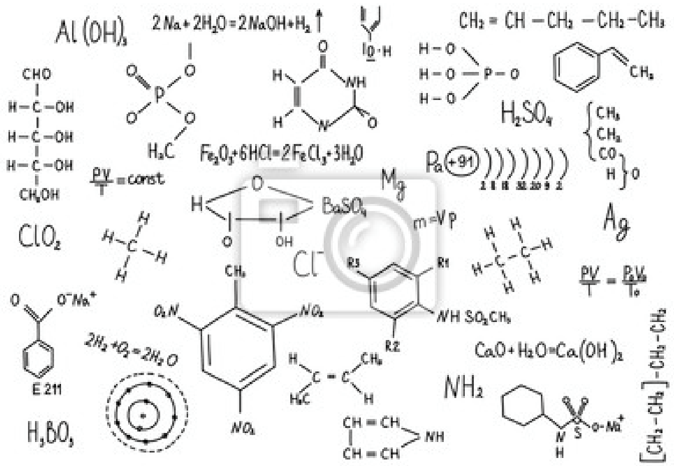
Physik



Geometrie

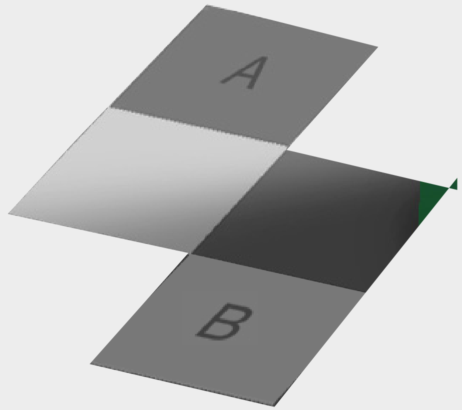


Chemie



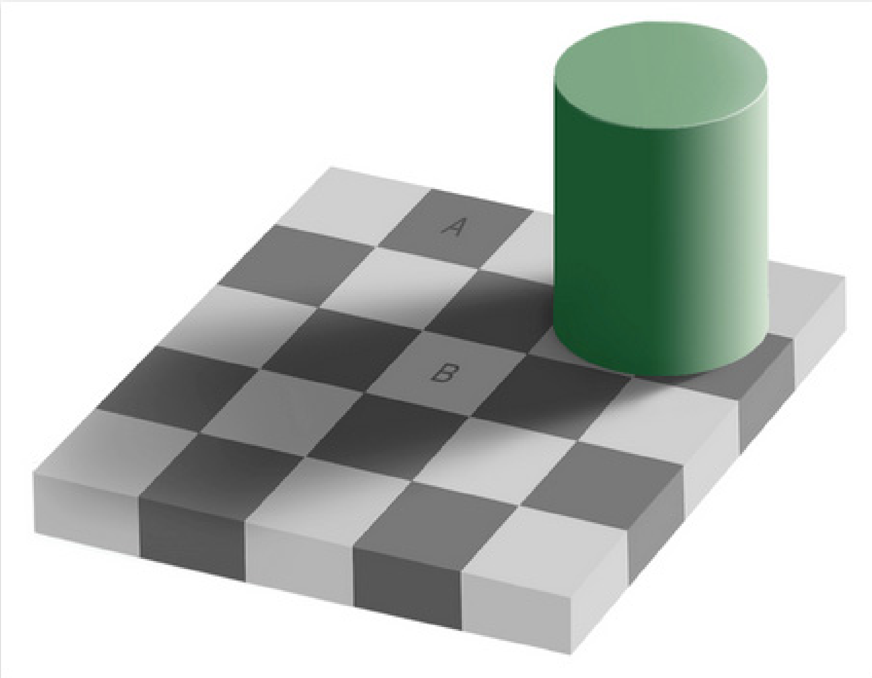
Wahrnehmung (Kognition) des Menschen

- Der Mensch nimmt etwa so war, dass es zu seinem internen Modell "passt".
- In menschlicher Evolution wichtig, da oft nur unvollständige Information



Wahrnehmung des Computers: Google Vision

- Der Computer erkennt "nur" die Teile
  - https://cloud.google.com/vision/

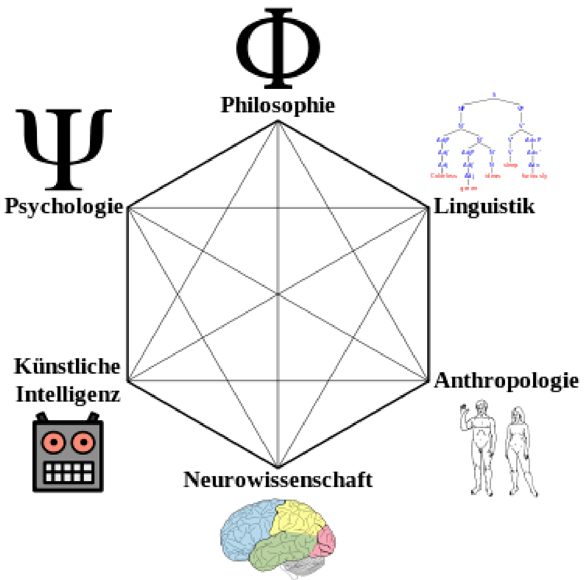


Grey_square_optical_illusion.PNG

Product	80%
Angle	60%
Cylinder	57%
Product	57%
Square	56%
Rectangle	52%
Games	50%
Tabletop Game	50%

Kognitionswissenschaft

- Interdisziplinäre Wissenschaft zur Erforschung bewusster und *potentiell bewusster* Vorgänge (engl. science of the mind).
- Die Verarbeitungen von Information im Rahmen menschlichen Denkens und Entscheiden als auch maschinellem Verarbeiten.



Immanuel Kant's Metaphysik

- **Empirismus**: aus Beschrieb der Erfahrung/Natur
  -> allgemeine Regeln : "Erfahrungswissenschaft"
  Induktionsprinzip
- **Rationalismus**: logisches Regelwerk
  -> Erfahrungen/Natur erklären : "Logik","Mathematik"
- **Deduktionsprinzip**

- bis 1791 "Kampf" der beiden philosophischen Richtungen

- Kopernikanische Wende der Philosophie: "Kritik der reinen Vernunft"

Vernunft/Denken bestimmt die Wahrnehmung/Realität

Kant's Kategorien des Denkens

- Denken/Urteilen lässt sich in 12 grundlegende **Kategorien** unterteilen (a priori = unabhängig von Erfahrung, analytisch = nicht abgeleitet)

Urteilsformen und Kategorien

↓ Urteilsfunktionen

Quantität	Allgemeine (alle S sind P)	Besondere (einige S sind P)	Einzelne (ein S ist P)
	Einheit	Vielheit	Allheit
Qualität	Bejahende (S ist P)	Verneinende (S ist nicht P)	Unendliche (S ist Nicht-P)
	Realität	Negation	Limitation
Relation	Kategorische (S ist P)	Hypothetische (wenn ... dann)	Disjunktive (entweder.. oder)
	Inhärenz – Subsistenz	Kausalität – Dependenz	Gemeinschaft
Modalität	Problematische (es ist möglich)	Assertorische (in der Tat ist)	Apodiktische (notwendig ist
	Möglichkeit – Unmöglichkeit	Dasein – Nichtsein	Notwendigkeit – Zufälligkeit

Wissensrepräsentation

Logikbasierte WR, Inferenz und KI

- **Geschichtliches:**
  - 322 BC Aristoteles: z.B. Satz vom Widerspruch: $A \land \neg A$ = FALSE,
  - 1781 Kant: Kritik der reinen Vernunft, **Kategorien des Denkens**
  - 1847 Boole: **Aussagenlogik** (AL)
  - 1879 Frege: **Prädikatenlogik** 1. Stufe (PL1)
  - 1922 Wittgenstein: Beweis von Aussagen durch **Wahrheitstabellen**
  - 1964 Robinson: **Resolutionsmethode**: Algorithmus für PL1
  - 1970 Prolog (Programming in Logic): Colmerauer & Kowalski
  - seither viele Varianten logischer Sprachen und Kalküle, z.B.:
    - *Zeitlogiken (Allen)*
    - *Modallogiken*
    - *Defaultlogiken*
    - *Stochastische Algorithmen: Neuronale Netzwerke, Genetische Algorithmen*
  - 1982 Start von 5th Generation Projekt in Japan
    - *http://en.wikipedia.org/wiki/Fifth_generation_computer_systems_project*
  - 1992 Abbruch 5th GP; Fehlschläge häufen sich -> KI wird "Unwort"
  - ab 2000 Revival in Spielen: "intelligente Gegner"
  - ab 2005 kommerzielles Revival : "Business Rule Engines"
  - ab 2013 Human Brain Project (mehrere Mia EU Projekt)

Wissensdarstellung (Wissensrepräsentation)

- **Motivation**
  - Ab 1965 setzte sich in der KI die Einsicht durch, dass viele (**intellektuell herausfordernde** sowie **Alltagsprobleme**) eigentlich nur lösbar sind, wenn man auf Erfahrungen (d.h. Vorwissen) über Art des Problems und mögliche Lösungsansätze verfügt.
  - Ab den 80er versucht man auch selbstlernende Verfahren (Machine Learning)

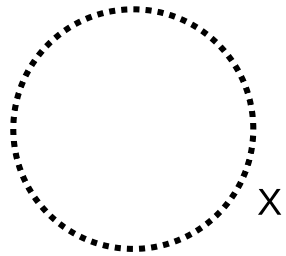
  - zentrale Forschungsfragen der KI:
    - *wie kann man Wissen darstellen, sprich „**repräsentieren**"?*
    - *wie kann man mit dargestelltes Wissen zur Problemlösung heranziehen?*
    - *wie kann man Systeme dazu bringen, selbst Wissen zu erfassen bzw. zu erlernen?*

  - Es gibt viele unterschiedliche Arten Wissen **explizit** zu repräsentieren
    - *in der KI wurden **symbolische Ansätze** entwickelt*

  - Grundsätzliche Frage: "was ist nun eigentlich KI"?
  - Pragmatische Definition: als KI wird das bezeichnet, worin der Mensch zur Zeit (noch) besser ist

Prozedurale vs. deklarative Wissensdarstellung

- **Aufgabe:**
  - Drücke aus, dass Punkteschar X einen Kreis darstelle.



- **Prozeduraler Ansatz:**

Beschreibt Ablauf

  - 1. Bestimme den Schwerpunkt von X
  - 2. Miss den Abstand vom Schwerpunkt zu jedem Punkt am Objektrand.
  - 3. Vergleiche die Abstände miteinander.
  - 4. X ist rund gdw. alle Abstände innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbereiches denselben Wert haben.

- **Deklarativer Ansatz:**

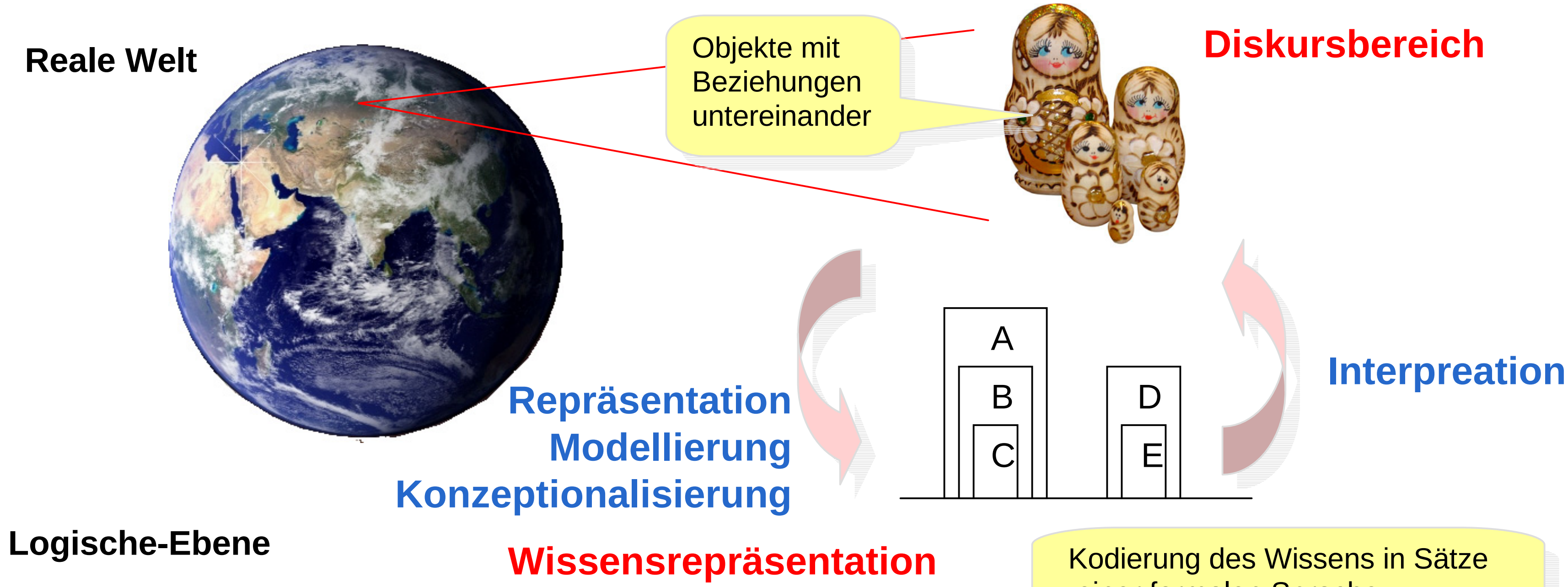
Beschreibt Fakten

  - Führe Prädikat Ist_rund ein: Ist_rund(X) = true

- **Anmerkung**
  - prozeduraler Ansatz fokussiert die **Vorgehensweise**, wie man die Gültigkeit eines Sachverhalts **algorithmisch** überprüft oder herstellt.
  - deklarartiver Ansatz fokussiert den **Wahrheitsgehalt** einer Aussage.

Diskursbereich, Wissensrepräsentation

- Diskursbereich: Teil des "Weltwissens" über den Aussagen gemacht werden.



- z.B. Menge D von Objekten: 5 Puppen
- Relationen in D^n Contains:{(A,B),(B,C),(D,E)} Outermost:{(A),(D)}
  Puppet:{A,B,C,D,E} Innermost:{(C),(E)}
- Funktionen $D^n \rightarrow D$ Next_Smaller: {(A,B),(B,C),(D,E),(A,D)}

Wissensrepräsentation

- Formalismus zur Darstellung von Wissen über einen bestimmten Bereich (Modellierung von Objekten, Beziehungen, ...)

- Begrenztes Abbild der Realität
  - implizite Repräsentation
    - *Programme*
  - explizite Repräsentation
    - *Aussagen, Prädikate*
    - *Frames, semantische Netzwerke*
    - *Regeln, Produktionssysteme*

Syntax

if (p[a].height > p.height)…

Formeln / Logik

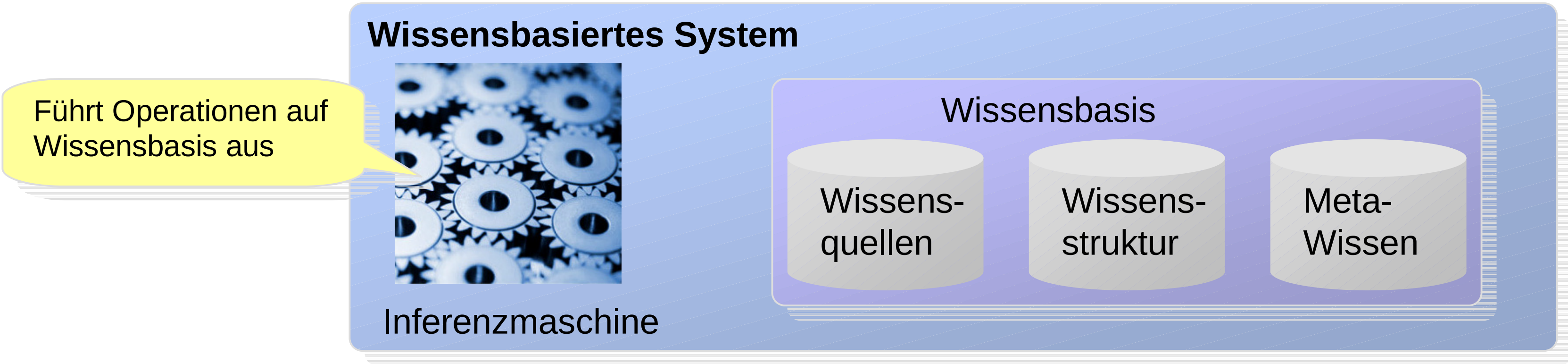
- Konstanten, Variablen
- Funktionssymbole
- Prädikatensymbole
- Logische Symbole ($\vee$, $\wedge$, ...)

- Explizite/formalisierte Repräsentation ermöglicht es, dass neues Wissen aus bestehendem mittels einer "Logikmaschine" (Inferenzmaschine) abgeleitet werden kann

- ***Closed-World Assumption*** (CWA), d.h. es wird nur das als wahr angenommen, was in der Wissensbasis steht.

Grundbegriffe der Wissensrepräsentation

- **Wissen**: Ansammlung von Kenntnissen, Erfahrungen und Problemlösemethoden, die den Hintergrund für komplexe Informationsverarbeitungsprozesse bilden.
  - **Wissensrepräsentation**: Formale, computergerechte Darstellung von Wissensinhalten.
  - **Wissensrepräsentationssprache**: Formale Sprache zur systematischen Wissensrepräsentation.
  - **Wissensbasis**: Gesamtheit an Wissen, die einem WB-System zur Verfügung steht.
  - **Metawissen**: Wissen, das sich auf anderes Wissen innerhalb einer Wissensbasis bezieht.
  - **Inferenzmaschine**: Teil eines WB-Systems, das der Auswertung und Anwendung des in der WB abgelegten Wissens dient.
  - **Wissensbasiertes System:** Ein System (Programm), das auf einer Wissensbasis operiert



Mögliche Formen von Wissensrepräsentation

- **Formulierung eines darzustellenden Sachverhalts:**
  - in natürliche Sprache
  - als Menge von Inferenzregeln (Wenn x dann y)
  - mit mehrwertiger Logik (Fuzzy-Logik)
  - **mit Objekten und Methoden (OO-Programmierung)**
  - graphisch als semantisches Netz
  - mit Bayes-Netzen
  - als Genom

- ***mit Konstrukten der Aussagenlogik bzw. Prädikatenlogik 1-ter* Ordnung***

- ***mit den Konstrukten einer Programmiersprache: Prolog***

** Anmerkung: 1. Ordnung: keine Aussagen über Aussagen erlaubt: z.B. "Ein Kreter sagt: alle Kreter lügen" ist 2. Ordnung*

Anforderungen an die Wissensrepräsentation

- **Modellierung eines Anwendungsbereichs:**
  - Verwendung einer **Menge von Symbolen** sowie
  - einer Menge **syntaktischer** und **semantischer Vereinbarungen**

- **Anpassung an den Anwendungsbereich**
  - **Ausdrucksfähigkeit** (Objekte und Phänomene des Anwendungsbereichs können passend ausgedrückt werden)
  - **Vollständigkeit** (alles Notwendige ist repräsentiert)
  - **Kompaktheit, Prägnanz** (wichtige Dinge werden in den Vordergrund gestellt, unwichtige unterdrückt)
  - Eindeutigkeit
  - **Operationalisierbarkeit** (Wissenrepräsentation muss in System eingebettet werden können, welches Problemlösungsprozess/Operartionen ermöglicht)
  - **Transparenz** für den Anwender: sind Antworten des Systems für den Benutzer nachvollziehbar

Logikbasierte WR und Inferenz

- **Motivation:**
  - Ziehen gültiger Schlüsse für viele kognitive Prozesse relevant, z.B. Feststellung, ob ein Objekt eine bestimmte Eigenschaft hat oder nicht, Planung, Problemlösen, Kommunikation, Rekonstruktion aus dem Gedächtnis, Vorhersagen, etc.
- **Methodischer Ansatz**: Trennung von
  - anwendungs-abhängigem **faktischem Wissen**
  - anwendungs-**un**abhängigen **Verarbeitungsmechanismus**

- **Rolle der Logik in WB-Systemen:**
  - zu lösende Probleme sowie das zur Lösung relevante Wissen aus einem Anwendungsbereich werden **Fakten und Regeln** **deklarativ in einer Logiksprache formuliert** und dem WB-System übergeben.
  - WB-System ermittelt Lösung mittels eines **allgemeinen Verfahrens zum logischen Schlussfolgern (= Inferenzmechanismus)**.

- **Problemlösungen (z.B. Handlungsempfehlungen / -ausführungen) ergeben sich durch Inferenz aus dem Wissen.**

Schlussfolgerung, Inferenz, Deduktion

Regeln

Form der Regeln/Produktionen:

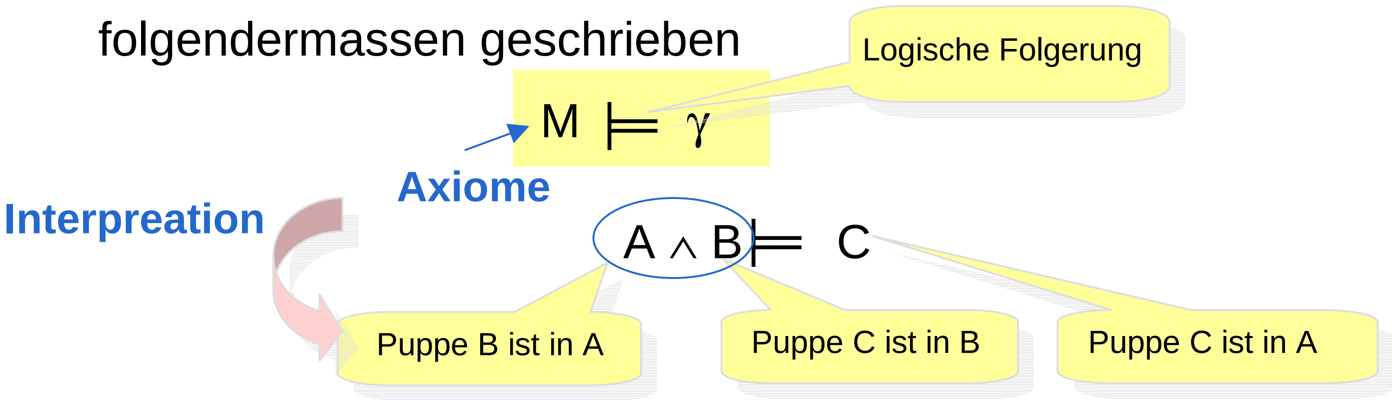
A	$\Rightarrow$	B
Wenn Teil	:	Dann Teil
Prämisse	:	Konklusion
Antezedenz	:	Konsequenz
Evidenz	:	Hypothese
Bedingung	:	Aktion
linke Seite	:	rechte Seite

Problemlösung erfolgt durch eine "**Inferenzmaschine"**:

Diese wählt passende Regeln aus und wendet sie an, bis das Problem gelöst oder keine passende Regel mehr vorhanden ist.

Interpretation, Wahrheitsgehalt

- **Interpretation**: Der Vorgang ordnet zunächst **bedeutungslosen Zeichen** bzw. Zeichenreihen des Systems Bedeutungen zu, sodass sich die Axiome des Systems in **entscheidbare {wahr,falsch} Aussagen** über das betrachtete Wissensgebiet (Diskursbreich) verwandeln
- Der Wahrheitsgehalt {wahr,falsch} eines Satzes (=Teil unserer WB) in unserem Modell wird durch die Interpretation bestimmt
- Falls der Satz wahr ist, ist er Teil unseres Modells (M); es wird auch als **Axiom** bezeichnet
- Falls aus M (= wahr) eine logische Konsequent γ folgt, dann wird es folgendermassen geschrieben



Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit und Inferenz

Daraus lassen Inferenzregeln herleiten

- Ein Satz ist **allgemeingültig**, wenn er für alle Interpretationen wahr ist
  - z.B. $(A \vee \neg A)$, $(A \Rightarrow A)$, $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$: Allgemeingültige Sätze: Tautologien
  - immer erfüllt: $\models (A \vee \neg A)$
  - "es regnet oder es regnet nicht", "wenn es regnet dann folgt, daraus dass es regnet"
- Deduktionstheorem: setzt Allgemeingültigkeit in Beziehung zu Inferenz:
  - WB $\models \alpha$, g.d.w. (WB $\Rightarrow \alpha$) allgemeingültig für jede Interpretation (Variablensubstitiution)
- Ein Satz ist **erfüllbar**, wenn eine Interpretation existiert, für das er wahr ist
  - z.B. $(A \vee B)$
- Ein Satz ist **nicht erfüllbar**, wenn keine Interpretation existiert, für die er wahr ist.
  - z.B. $(A \wedge \neg A)$
- Erfüllbarkeit steht in Beziehung zu Inferenz wie folgt:
  - WB $\models \alpha$, g.d.w. (WB $\wedge \neg \alpha$) ist nicht erfüllbar

WB : Puppe B in A $\wedge$ Puppe C in B
α : Puppe C in A

Beweis der Erfüllbarkeit

- Ziele:
  - 1. Suche nach allen Sätzen, die aus einer Wissensbasis abgeleitet werden können
  - 2. bei gegebener Wissensbasis: Frage nach der Ableitbarkeit eines bestimmten Satzes: "lässt sich aus dem bestehenden Wissen der Wahrheitsgehalt einer Frage (eines Satzes) beantworten".

- Ansätze für den Beweis der Erfüllbarkeit (Inferenzbarkeit):
  - Test aller möglicher Belegungen (z.B. **Wahrheitstabelle**)
  - Anwendung von **Inferenzregeln** (systematisch oder heuristisch)
  - verschiedene Methoden:
    - *Wangs Algorithmus (Wang, 1960)*
    - *Resolution (Robinson, 1964)*
    - *Konnektionsmethode (Bibel, 1970)*

Aussagenlogik

Aussagenlogik

- Lexikalischer Teil:
  - Konstanten TRUE, FALSE
  - Satzsymbole A, B, ...
  - Klammern
  - logische Verknüpfungssymbole: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

- Struktureller Teil:
  - Sätze:
    - *die logischen Konstanten TRUE und FALSE bilden Sätze*
    - *Jedes Satzsymbol (Literal) bildet einen atomaren Satz*
    - *wenn A und B Sätze sind, dann auch* $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ *(komplexe Sätze)*
    - *eine geklammerte Verknüpfung von Sätzen bildet wiederum einen Satz (z.B.* $(A \wedge B \wedge C)$, $(A \wedge B) \vee C$

… Aussagenlogik

- Semantik:
  - **Interpretation** in der Aussagenlogik ist eine Abbildung der Atome auf {wahr,falsch}, d.h. Satzsymbole beziehen sich auf Fakten aus der Welt, die wahr oder falsch sein können
  - TRUE bezieht sich auf einen wahren Teil der Welt , FALSE auf einen Teil, der nicht wahr ist
  - die Interpretation komplexer (zusammengesetzter) Sätze setzt sich aus der Interpretation seiner Teile zusammen. Basisoperation dabei:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE
TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE
TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE

A = es regnet ✓
B = es ist kalt ✓

Normal-Formen

Disjunktive Normalform:

- Disjunktion (Oder-Verknüpfung) von Konjunktionstermen (Und-Verknüpfung)

$$\bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j}\right) = (L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,m_1}) \vee \ldots \vee (L_{n,1} \wedge \ldots \wedge L_{n,m_n})$$

$$\text{mit } L_{i,j} \in \{A_1, A_2 \ldots\} \cup \{\neg A_1, \neg A_2 \ldots\}$$

$$\text{z.B.} \quad (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C \wedge D) \vee (B \wedge C)$$

Konjunktive Normalform:

- Konjunktion (Und-Verknüpfung) von Disjunktiontermen (= Klauseln) (Oder-Verknüpfung) bestehend aus Literalen (atomare Satz)

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j}\right) = (L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,m_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{n,1} \vee \ldots \vee L_{n,m_n})$$

$$\text{mit } L_{i,j} \in \{A_1, A_2 \ldots\} \cup \{\neg A_1, \neg A_2 \ldots\}$$

$$\text{z.B.} \quad (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C \vee \neg D)$$

Vorbereitung Resolutionsbeweise: Mengenrepresentation

- **Konjunktive Normalform**
  - ***Klausel***: $C_i = \{L_{i1} \vee \ \ldots \vee L_{ik}\}$ Disjunktion von Literalen (=atomarer Satz)
  - $\varphi = (C_1 \wedge \ldots \wedge C_n)$ Konjunktion von Klauseln

- **Mengenrepräsentation:** *Klauselnormalform*
  - $\varphi = \{C_1 \, , \ldots , C_n\}$ Mengen von Klauseln

- **Vorteil der Mengenrepräsentation:**
  - evtl. kompakter als K.N.F.
  - Reihenfolge spielt keine Rolle

- Beispiel: Die beiden Formeln ψ und φ haben die gleiche Mengenrepräsentation:
  - $\psi = ((A \vee \neg B) \wedge (C \vee C))$
  - $\varphi = (C \wedge (\neg B \vee A))$

Vorbereitung Resolutionsbeweise: Inferenzregeln

- einige Inferenzregeln:

Modus Ponens $$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \qquad \alpha}{\beta}$$	**Und-Auflösung** $$\frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n}{\alpha_i}$$
Und-Einführung $$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n}$$	**Einheits-Resolution** $$\frac{\alpha \vee \beta, \qquad \neg\beta}{\alpha}$$
Oder-Einführung $$\frac{\alpha_i}{\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_i \vee \ldots \vee \alpha_n}$$	**Resolution** $$\frac{\alpha \vee \beta, \qquad \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma}$$

Vorbereitung Resolutionsbeweise: Beispiel von Inferenz

Resolution
$$\frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma} \Leftrightarrow \frac{\neg\alpha \Rightarrow \beta, \quad \beta \Rightarrow \gamma}{\neg\alpha \Rightarrow \gamma}$$

$$\downarrow$$

$$((\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \gamma)) \Rightarrow (\alpha \vee \gamma)$$

α	β	γ	$\alpha \vee \beta$	$\neg\beta$	$\neg\beta \vee \gamma$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \gamma)$	$\alpha \vee \gamma$
FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE
FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE
TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE

$\Rightarrow$

Vorbereitung Resolutionsbeweise: Resolvente

- **Resolvente:**

Seien C_i und C_k Klauseln die ein komplementäres Literal L (bzw. L‘) enthalten, d.h.,

- $L \in C_i$ und $L' \in C_k$

dann heisst die Menge $R = (C_i \setminus \{L\}) \cup (C_k \setminus \{L'\})$ **Resolvente** der Klauseln C_i und C_k

- $\underbrace{(A \vee L)}_{T1} \wedge \underbrace{(B \vee \neg L)}_{T2} \Rightarrow (A \vee B)$

"Beweis"

A	B	L	A v L	B v ~L	~(T1 & T2)	A v B	
			T1	T2			
FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE
FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE
FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE
FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE
TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE

$\neg a \vee b$

$\Rightarrow$

Resolutionsbeweis für Aussagenlogik

Resolutionsregel und Widerlegungsbeweise

Widerlegungsbeweise mit der Resolutionsregel:

- Um zu beweisen, dass aus einer einer gegebenen Formelmenge F eine Behauptung (Formel) φ semantisch folgt, führt man einen Widerspruchsbeweis, in dem man zeigt, dass die Negation von φ semantisch nicht aus F folgt.

- Formal:
  1. zeige, dass semantisch äquivalente Aussage: $F \models \neg\varphi$ nicht gilt.
  2. zeige dazu, dass: $(F \cup \{\neg\varphi\}) \vdash \{\}$

     d.h. aus $(F \cup \{\neg\varphi\})$ lässt sich syntaktisch die **leere Formel** ableiten, die einen Widerspruch der Form $(A \wedge \neg A)$ repräsentiert.
  3. Verwende zur syntaktischen Ableitung die Resolutionsregel

Struktur eines Resolutionsbeweises:

- **Struktur eines Resolutionsbeweises:**

  Sei F eine Formelmenge und ψ die Formel, für die zu prüfen ist, ob gilt: $F \models \psi$

  Dann:

  1. $\varphi = F \cup \{ \neg\psi\}$
  2. bestimme Mengenrepräsentation der *Klauselnormalform* von φ
  3. Leite solange Resolventen ab, bis entweder
     - eine leere Resolvente entsteht (dann ist Widerspruch erreicht)
     - oder keine Resolvente mehr ableitbar ist.

Beispiel eines Resolutionsbeweis

Beispiel: Sei F = { (A∨B∨¬C}, (A∨B∨C), (A∨¬B)}

- Frage: Gilt F |= A ?
- Dazu: nimm an, es gelte F,{ ¬A} |= {}
- φ = { {A∨ B∨ ¬C}, {A∨ B∨ C}, {A∨ ¬B}, {¬A} }

{A∨ B∨ ¬C} {A∨ B∨ C},

{A∨ B}, {A∨ ¬B}

{A} {¬A},

{ } leere Resolvente, also F |= A gilt

Resolutionskalkül für Aussagenlogik

- **Aufgabe:**
  - Um die Resolutionsregel anwenden zu können, müssen die Formeln der WB sowie die zu beweisende Formel in die konjunktive Normalform ("Klauselnormalform") transformiert werden.
- **Transformation in Klauselnormalform:**

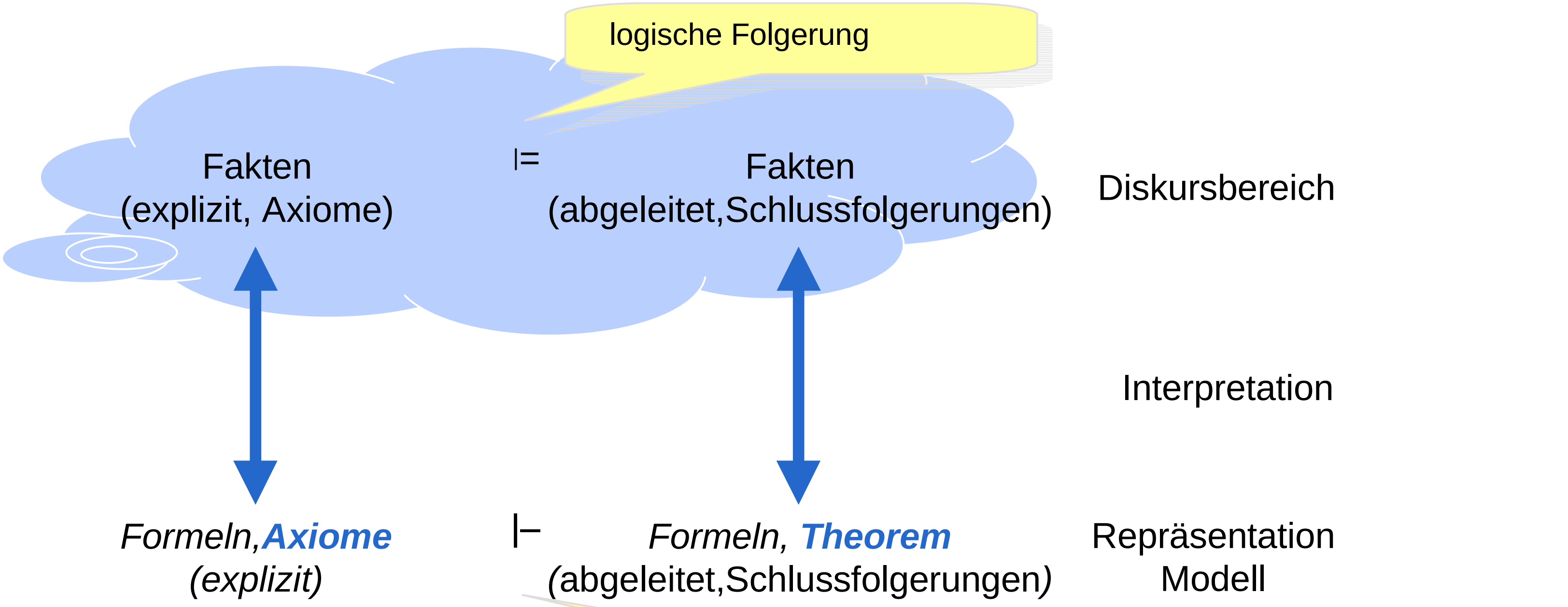
1. Ersetze **Äquivalenz** $(A \Leftrightarrow B)$ durch $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
2. Ersetze **Implikation** $(A \Rightarrow B)$ durch $(\neg A \vee B)$
3. Verschiebe **Negation** an die Satzsymbole, d.h., ersetze z.B.

   $\neg(A \wedge B)$ durch $(\neg A \vee \neg B)$
4. Eliminiere **Doppelnegationen**: d.h. ersetze $\neg(\neg A)$ durch A
5. **„Ausmultiplizieren“,** d.h. wende Distributivgesetze an bis Klauselform erreicht ist.

   Beispiel: $(C \vee (\neg A \wedge B))$ wird ersetzt durch: $(C \vee \neg A) \wedge (C \vee B)$

Logische vs syntaktische Folgerung

Eigenschaften des Resolutionskalkül



Was ist der Zusammenhang zwischen logischem und syntaktischem Folgern bzw. wie soll er sein?

durch syntaktische Umformung
(z.B. Resolutionskalkül) herleitbar

Eigenschaften des Resolutionskalkül

- **Korrektheit**
  - Sind die Axiome gültig und die Inferenzregeln korrekt, dann gilt, dass der logische Beweis korrekt ist.

    $M \vdash s \Rightarrow M \models s$

  - Alles aus den Axiomen zu beweisenden Theoreme sind auch die logische Konsequenz der Axiome

- **Frage: Ist der Resolutionskalkül vollständig?**
  - Vollständigkeit würde bedeuten, dass jede aus einer Formelmenge F folgerbare Formel ψ mit der Resolutionsregel ableitbar ist.
  - $M \models s \Rightarrow M \vdash s$

- **Widerlegungsvollständigkeit (lässt sich beweisen):**
  - Der RK ist widerlegungsvollständig. D.h., ist die zu untersuchende Formelmenge widersprüchlich, so findet man den Widerspruch mit einer endlichen Anzahl von Resolutionsschritten.

Eigenschaften und Kritik der Aussagenlogik

- **Eigenschaften der Aussagenlogik**
  - ist **monoton**, d.h. hinzugefügtes Wissen (Axiom) verändert nicht die Gültigkeit von Schlussfolgerungen

$$\boxed{\text{Falls WB1} \models \alpha \text{, dann auch (WB1} \cup \text{WB2)} \models \alpha}$$

  - ist vollständig: jede wahre Aussage der Aussagenlogik ist aus WB ableitbar (d.h., es gibt einen Algorithmus, der alle wahren Aussagen aufzählt).
  - Gilt nicht für Prädikatenlogik (später)

- **Probleme:**
  - Einschränkung der Modellierung auf Fakten bzw. Klauseln mit {wahr/falsch} Wahrheitsgehalt
  - Strukturelle Beziehungen müssen explizit als Fakten repräsentiert werden => wird schnell sehr unhandlich.
  - Einschränkungen der Ausdrucksmächtigkeit: Keine Quantoren(alle, existiert ein), Relationen und Funktionen.

Probleme mit der Aussagenlogik

Beschränkte Ausdrucksmächtigkeit der Aussagenlogik

- **Beispiel:** Gegeben seien folgende Fakten:
  1) drei Studenten: Hans, Peter, Paul
  2) einer von Ihnen studiert Informatik, einer Physik und einer Biologie
  3) jeder Informatikstudent hat einen Computer
  4) der Biologiestudent ist der jüngste von den dreien

- **Formulierung in Aussagenlogik:**
  - durch Einführung geeigneter Fakten für die oben genannten Sachverhalte; z.B.:
  - zu 1): student_Hans, student_Peter, student_Paul
  - zu 3): Problem: es ist nicht klar, wer Informatik studiert.

  - (umständlicher) **Ausweg:** alle möglichen Fälle durch Formeln in Aussagenlogik ausdrücken:

$$\text{info\_student\_Hans} \Rightarrow \text{hat\_Computer}$$

$$\text{info\_student\_Peter} \Rightarrow \text{hat\_Computer}$$

$$\text{info\_student\_Paul} \Rightarrow \text{hat\_Computer}$$

Beschränkte Ausdrucksmächtigkeit der Aussagenlogik

WB : alle Menschen sind sterblich $\wedge$ Sokrates ist ein Mensch

α : Sokrates ist sterblich

mensch_Peter -> sterblich

mensch_Paul -> sterblich

mensch_Mary -> sterblich

mensch_Sokrates -> sterblich

….

mensch_Peter

mensch_Paul

...

einfacher:

$\forall$x mensch(x) -> sterblich(x), mensch(Sokrates)

-> sterblich(Sokrates)

Beschränkte Ausdrucksmächtigkeit der Aussagenlogik

- **Frage:**

  wie behandelt man Schlussfolgerungen der Art:

  1. Alle Objekte mit der Eigenschaft F haben die Eigenschaft G.

  2. Das spezielle Objekt O hat die Eigenschaft F.

     => das spezielle Objekt O die Eigenschaft G.

- Hat man n Objekte mit der Eigenschaft F, so müsste man auch hier zunächst für jedes Objekt Implikationen der Art formulieren:
  - $F(O_1) \Rightarrow G(O_1)$
  - $F(O_2) \Rightarrow G(O_2)$
  - ....
  - $F(O_n) \Rightarrow G(O_n)$

  um dann schliessen zu können, dass auch für ein bestimmtes O_i

  gilt $G(O_i)$.

- Lösung: Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

Motivation. Erweitere die Ausdrucksmächtigkeit der Prädikatenlogik durch Hinzunahme von:

- **Prädikaten**, d.h. boole'schen Funktionen : $p(x_i)$ -> Bool
- **Variablen x_i**
- **Quantoren** (dienen zusammen mit einer Variable dazu, über eine Menge von Objekten zu sprechen, ohne diese im einzelnen zu benennen)
  - **Existenzquantor** „Es gibt ein x mit Eigenschaft P(x)“
    Notation: $\exists\, x : P(x)$
  - **Allquantor:** „Für alle x gilt x hat Eigenschaft P(x)“
    Notation: $\forall\, x : P(x)$

Beispiel:

$\exists\, x : student(x) \wedge info\_student(x)$

$\forall\, x : info\_student(x) \Rightarrow hat\_Computer(x)$

Prädikatenlogik 1. Ordnung (PL1)

Ziel

- Prädikatenlogik 1. Ordnung beschreibt Objekte, deren Eigenschaften und deren Beziehungen zueinander
- man möchte in der Lage sein, die Gültigkeit von Formeln formal beweisen bzw. widerlegen zu können.
- Analog zur Aussagenlogik Unterscheidung zwischen Syntax und Semantik.
- *1. Ordnung: keine Prädikate über Prädikate.*

Syntax: Lexikalischer Teil

- Konstanten-Symbole: TRUE, A, B, Hans, Paul, ...
- Funktions-Symbole: plus, minus, mul, …
- logische Verknüpfungen: $\wedge \vee \neg \Leftrightarrow \Rightarrow$
- Gleichheit „=„
- Variablen-Symbole: x, y, ...
- Prädikats-Symbole: student, hat_Computer
- Quantoren $\exists$, $\forall$

Formulierung von Sachverhalten in Prädikatenlogik

Beispiele:

- “Alle Kinder lieben Eiscreme”

  $\forall x : \mathit{Kind}(x) \Rightarrow \mathit{mag\_Eiscreme}\ (x)$

- “Es gibt einen Baum der Nadeln hat”

  $\exists x : \mathit{Baum}(x) \wedge \mathit{hat\_Nadeln}(x)$

- *Die Mutter einer Person ist dessen weibliches Elternteil*

  $\forall x\ \forall y : \text{Mutter}\ (x,y) \Leftrightarrow (\text{weiblich}(x) \wedge \mathit{Elternteil}(x,y))$

- *“Ein Cousin ist das Kind einer der Geschwister eines Elternteils”*

  $\forall x\ \forall y : (\ \text{Cousin}(x,y) \Leftrightarrow\ \exists v\ \ \exists w : \mathit{Elternteil}\ (v,x) \wedge \mathit{Elternteil}(w,y) \wedge \mathit{Geschwister}\ (v,w)$

- *“ die Relation ‚Geschwister` ist symmetrisch”*

  $\forall x\ \forall y : \text{Geschwister}(x,y) \Rightarrow \text{Geschwister}(y,x)$

Repräsentation natürlichsprachlicher Aussagen in Prädikatenlogik

Wortart	**Darstellung in Logik**	**Beispiel**
Eigenname	Konstante	*garfield*
(allgemeines) Substantiv	1-stelliges Prädikat	*cat*(*Who*)
Adjektiv	1-stelliges Prädikat	*lazy*(*Who*)
intransitives Verb	1-stelliges Prädikat	*sleeps*(*Who*)
transitives Verb	2-stelliges Prädikat	*sees*(*Who*, *What*)
bitransitives Verb	3-stelliges Prädikat	*gives*(*Who*, *What*, *To*)

"A $noun_{sg}$ $verb_{sg}$". $\exists X\ (\ noun_{sg}(X) \wedge verb_{sg}(X)\ )$

"All $noun_{pl}$ $verb_{pl}$". $\forall X\ (\ noun_{pl}(X) \rightarrow verb_{pl}(X)\ )$

Prädikatenlogik

Durch Quantoren gebundene Variable

- Ein Vorkommen einer Variable *x* in der Formel S ist *gebunden* wenn *x* in einer Teilformel vom Typ ∃ x: R, oder ∀ x: R auftritt

Freie Variable

- tritt in einer Formel S eine Variable nicht gebunden auf, so heisst sie **frei**.

Prädikatenlogischer Satz

- Eine Formel ohne Vorkommen von freien Variablen ist ein prädikatenlogischer *Satz*.

Anmerkung:

- Meist schränkt man sich auf die Betrachtung von Sätzen ein (also nur ∃ oder ∀ quantifizierte Variablen).
- *Falls man nur Sätze mit allquantifizierte Variablen vorliegen hat, und dies aus dem Kontext heraus klar ist, schreibt man der Einfachheit halber die All-Quantoren nicht explizit hin.*

Eigenschaften von Quantoren

Kommutativität

- $\forall x\ \forall y : F$ ist semantisch äquivalent zu $\forall y\ \forall x : F$
- $\exists x\ \exists y : F$ ist semantisch äquivalent zu $\exists y\ \exists x : F$

Aber:
$\exists x\ \forall y : F$ ist NICHT semantisch äquivalent zu $\forall y\ \exists x : F$

Beispiel:
$\exists x\ \forall y : mag(x,y)$
“Es gibt jemanden, der alle in der Welt mag”
$\forall y\ \exists x : mag(x,y)$
“Jeder in der Welt wird von mindestens einer Person gemocht”

Umformbarkeit

- All- und Existenz-Quantor können durch den jeweils anderen ausgedrückt werden. Z.B.:

  $\forall x : F$ ist semantisch äquivalent zu $\neg \exists x : \neg F$

Wissensverarbeitung mit Prädikatenlogik

- Prädikatenlogik ist insbesondere wegen der Möglichkeit zur Quantifizierung ausdrucksstärker als Aussagenlogik

  => Vorteil bei der Formalisierung von Fakten und Abhängigkeiten eines zu modellierenden Gegenstandsbereichs.

Frage

- Gibt es wie im Falle der Aussagenlogik Inferenz-Regeln, mit denen sich die Gültigkeit von Formeln (mechanisch) herleiten lässt?

Antwort: Ja. Beispiele für gültige **Inferenz-Regeln** für die Prädikatenlogik:

Modus Ponens:

$$\frac{\phi\ ,\ \ \phi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Instanzierung:

$$\frac{\forall x\ \ P}{P\ [x/a]}$$

Instanzierung und Modus Ponens:

$$\frac{P\ (a)\ ,\ \forall\ x\ P(x) \rightarrow Q(x)}{Q\ (a)}$$

Speziellere Fragen

- Mit welche Inferenz-Regeln soll man ein automatisches Beweisverfahren aufbauen?
- Gibt es auch einen Resolutionskalkül für die PL1?

Antwort

- Die Resolutionsregel lässt sich auch auf PL1 übertragen.
- Der Resolutionskalkül lässt sich so erweitern, dass man mit ihm auch Widerspruchsbeweise über prädikatenlogische Formeln führen kann.

Sei S eine Menge von Klauseln und ϕ eine Anfrage, die man beweisen will, dann gilt:

$S \models \phi$ gdw. $S \cup \{\neg \phi\}$ widersprüchlich

- Erweiterungen betreffen die Behandlung quantifizierter Variablen

  => Formeln müssen in bestimmte Form gebracht werden.

Resolutionskalkül für Prädikatenlogik

Resolutionskalkül für PL1

Aufgabe:

Um die Resolutionsregel anwenden zu können, müssen die Formeln der WB sowie die zu beweisende Formel in Klauselnormalform transformiert werden.

Behandlung von Variablen und Quantoren:

1. Eindeutige Benennung quantifizierter Variablen. Falls eine Formel ψ gleichbenannte Variablen enthält, die jedoch an unterschiedliche Quantoren gebunden sind, benenne diese um.

2. Eliminiere alle freien Variablen dadurch, dass sie durch einen Existenzquantor gebunden werden. z.B. x frei in ψ, dann ersetze durch $\exists$ **x:** ψ

3. Herausziehen aller Quantoren. D.h. bringe ψ in die Form

   $Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2 \ldots Q_n\, x_n : \psi'$ mit ψ' enthält keine Quantoren.

… Behandlung von Variablen und Quantoren:

4. Eliminiere Existenzquantoren durch **Skolemisierung**.

   Idee: man kann in einer Formel ψ jedes Vorkommen einer existenzquantifizierten Variable y_i durch eine Funktion f_i ersetzen, wobei $\mathbf{f_i}$ eine Funktion ist, die in Abhängigkeit aller in vorkommenden allquantifizierter Variablen x_k ein geeignetes y liefert.

   Beispiel: $\forall$**x** $\exists$**y : *mag(x,y)*** *„jeder mag einen anderen“*

   *wird durch die sog. **„Skolemisierung“** ersetzt durch:*

   $\forall$**x : *mag(x, f(x))***

   mit ***neuer*** "hypothetischen" Funktion f(x), die zu x ein passendes y liefert.

5. Da nach Schritt 4 in Formel ψ nur noch Allquantoren vorkommen, werden diese weggelassen.

6. Überführen von ψ in Klauselnormalform analog zur Transformation aussagenlogischer Formeln. (d.h. ersetze Äquivalenz, Implikation, Doppelnegation, ziehe Negation vor Prädikate und multipliziere aus.

Resolutionskalkül für PL1

Was noch fehlt:

Nach der Umformung gemäss der Schritte 1-6 liegen alle Formeln in Klauselnormalform vor. Die Literale einer Klausel können jedoch sowohl Variablen als auch Konstanten enthalten.

Beispiel: { ¬***bruder(x, Hans)*** } { **bruder(Klaus, Hans)** }

{ }

In einem Resolutionsschritt muss es möglich sein, für Variablen bestimmte Belegungen einzusetzen. Im Beispiel: für x die Belegung „Klaus".

Unifikation von Termen (Literalen):

Gegeben: zwei Literale L_1 und L_2.

Gesucht: eine Variablensubstitution σ der Art, dass nach deren Anwendung auf L_1 und L_2 gilt:

$$L_1\sigma = L_2\sigma$$

Falls solch ein σ existiert, heisst σ **Unifikator** von L_1 u. L_2.

Algorithmus zur Unifikation von Literalen

Gegeben: zwei Literale L_1 und L_2.

Gesucht: Unifikator σ, der L_1 und L_2. „gleichmacht", d.h., $\mathbf{L_1\sigma = L_2\sigma}$

- Sind L_1 und L_2 **Konstanten**, so sind sie unifiziert, falls sie den **gleichen Namen** tragen. D.h.: Konstante L_1 ist nur mit L_1 unifizierbar
- Ist L_1 eine **Variable** und L_2 ein **beliebiger Term**, so sind L_1 und L_2 unifiziert, gdw. für Variable L_1 der Term L_2 eingesetzt wird und x nicht in L_2 vorkommt.
  Beispiel: *x* unifizierbar mit *Hans,* falls man x durch Hans ersetzt.

- Sind L_1 und L_2 **Prädikate oder Funktionen** der Form:
  $PL_1(s_1, ..., s_m)$ und $PL_2(t_1, ..., t_n)$ so lassen sie sich nur unifizieren falls:
  i) die **Prädikats- bzw. Funktionsnamen gleich** sind, d.h. $PL_1 = PL_2$
  ii) **n = m** gilt und sich jeder Term **s_i mit dem entsprechenden Term t_i unifizieren** lässt.

  Beispiel: *mag(x, y)* unifizierbar mit *mag(Hans, Anne)* falls man x durch Hans und y durch Anne ersetzt.

  Beispiel: *mag(Hans, x)* ist **nicht unifizierbar** mit *verheiratet(Hans, x)*

Unifikation

Beispiele:

L_1	L_2	Unifikator σ
`p(x,x)`	`p(a,a)`	`[x/a]`
`p(x,x)`	`p(a,b)`	fail (Unifikation nicht möglich)
`p(x,y)`	`p(a,b)`	`[x/a, y/b]`
`p(x,y)`	`p(a,a)`	`[ x/a, y/a]`
`p(f(x),b)`	`p(f(c),z)`	`[ x/c, z/b]`
`p(x,f(x))`	`p(y,z)`	`[ x/y, z/f(`**`y`**`)]` (Reihenfolge!
		`[ x/y, z/f(`**`x`**`)]` beachten!)
`p(x,f(x))`	`p(y,y)`	fail

Aufgabe

WB : alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch

Frage: α : Sokrates ist sterblich

1) Definieren Sie obige Aussage in Prädikatenform

2) Beweisen Sie diese mit Hilfe des Resolutionsbeweisverfahrens

Lösung: Resolutionsbeweis für PL1 Formel

WB : alle Menschen sind sterblich $\wedge$ Sokrates ist ein Mensch
Frage: α : Sokrates ist sterblich

$\forall \mathbf{x}$ (mensch(x) -> sterblich(x)), mensch(Sokrates),
sterblich(Sokrates)?

$\forall \mathbf{x}$ ($\neg$ mensch(x) v sterblich(x)), mensch(Sokrates), $\neg$ sterblich(Sokrates)

unifikation [x / Sokrates]

$\neg$ mensch(Sokrates) v sterblich(Sokrates), mensch(Sokrates), $\neg$ sterblich(Sokrates)

sterblich(Sokrates),

{}

Eigenschaften der Resolution für PL1 Formeln

Widerlegungsvollständigkeit:

- Sofern man Resolution auf eine widersprüchliche Klauselmenge anwendet, so existiert eine **endliche Folge** von Resolutionsschritten, mit denen man den Widerspruch aufdecken kann,

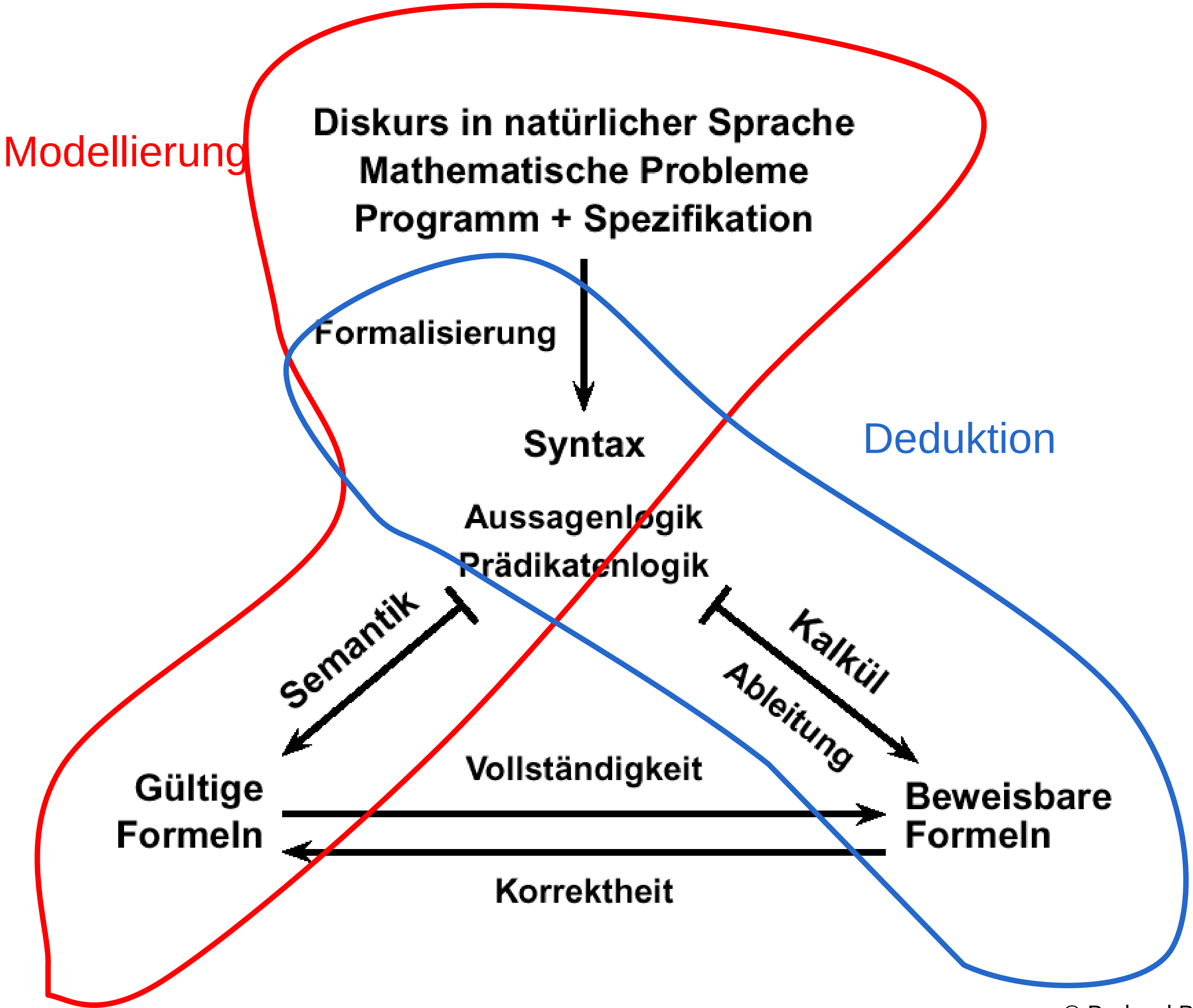
Effizienz:

- Beispiel: um zu zeigen: $\exists \mathbf{x}\ \boldsymbol{P}(\mathbf{x})$ versucht man zu zeigen (Negation): $\forall \mathbf{x}\ \neg \boldsymbol{P}(\mathbf{x})$
  - Direkt: Falls die Behauptung $\exists \mathbf{x}\ \boldsymbol{P}(\mathbf{x})$ nicht gilt und zudem x ein Element aus einer unendlichen Menge (z.B. Nat) ist, kann es sein, dass das Beweisverfahren nicht terminiert.
  - Resolution: Falls die Behauptung $\exists \mathbf{x}\ \boldsymbol{P}(\mathbf{x})$ gilt, dann führt WB $\cup$ { $\forall \mathbf{x}\ \neg \boldsymbol{P}(\mathbf{x})$ } nach N Beweisschritten zur leeren Klausel (und somit zum Widerspruch).

Aber: die Anzahl N der Beweisschritte kann sehr gross werden und damit das Verfahren unpraktikabel machen.

Für Logiken die Prädikate erlauben braucht es optimierende Verfahren

Zusammenfassung: Logik



© Berhard Beckert

Fragen

Resolutionsbeweis für PL1 Formel